Los primeros nueve capítulos de este libro, con varias sustituciones de los restantes, han constituido durante años el contenido de un curso de tres horas semanales en la Universidad de Michigan. Los alumnos provenían de Matemáticas, Ingeniería o Física. Antes de seguir este curso, habían pasado al menos por cursos de Cálculo, a veces incluso avanzado, y de introducción a las Ecuaciones Diferenciales. Para acomodarse a la audiencia más amplia posible, hay notas a pie de página que se refieren a libros en los que pueden consultarse demostraciones y discusiones de los aspectos más delicados del Cálculo que se van necesitando en cada momento. Parte del material de este libro es opcional y puede dejarse como lectura voluntaria para los estudiantes, fuera del curso normal. Si se desean ver en el curso las aplicaciones por funciones elementales y las transformaciones conformes antes de lo que aquí se presentan, puede pasarse directamente a los capítulos 7, 8 y 9, nada más terminar el capítulo 3.

La mayor parte de los resultados básicos se enuncian como teoremas, seguidos por ejemplos y ejercicios ilustrativos. En el Apéndice 1 se recoge bibliografía sobre otros libros, en general más avanzados. El Apéndice 2 contiene una tabla de transformaciones conformes útiles en la práctica.

En la preparación de esta revisión, el segundo autor ha aprovechado sugerencias de diversas personas. Entre los amigos que han utilizado la versión anterior y han hecho aportaciones específicas se encuentran B. S. Elenbogen, M. H. Höft, M. Jerison, y M. A. Lachance. Ha habido, asimismo, considerables sugerencias de quienes han revisado partes de la edición anterior y el manuscrito de la presente: S. H. Davis, Rice University; P. M. Fitzpatrick, University of Maryland; R. A. Fontenot, Whitman College; H. Hochstadt, Polytechnic University; W. L. Perry, Texas A&M University; F. Rispoli, Dowling College; y C. H. Wilcox, University of Utah.

He recibido además el interés constante y el apoyo de G. H. Brown, Jr., J. R. Brown, S. M. Flack, G. E. Hay, S. J. Milles, R. P. Morash, J. A. Moss, F. J. Papp, y R. L. Patterson, así como Robert A. Weinstein, Michael Morales, y Scott Amerman, del departamento editorial de McGraw-Hill.

James Ward Brown

CAPITULO

UNO

NUMEROS COMPLEJOS

En este capítulo estudiamos la estructura algebraica y geométrica de los números complejos. Suponemos conocidas varias propiedades correspondientes en los números reales.

1. DEFINICION

Los *números complejos* z se pueden definir como pares ordenados

$$z = (x, y) \qquad [1]$$

de números reales x e y, con las operaciones de suma y producto que especificaremos más adelante. Se suelen identificar los pares $(x, 0)$ con los números reales x. El conjunto de los números complejos contiene, por tanto, a los números reales como subconjunto. Los números complejos de la forma $(0, y)$ se llaman *números imaginarios puros*. Los números reales x e y en la expresión [1] se conocen, respectivamente, como *parte real* y *parte imaginaria* de z. Escribiremos:

$$\text{Re } z = x, \quad \text{Im } z = y. \qquad [2]$$

Dos números complejos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) se dicen *iguales* si tienen iguales las partes real e imaginaria. Es decir:

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \quad \text{si y sólo si} \quad x_1 = x_2 \quad \text{e} \quad y_1 = y_2. \qquad [3]$$

La *suma* $z_1 + z_2$ y el *producto* $z_1 z_2$ de dos números complejos $z_1 = (x_1, y_1)$ y $z_2 = (x_2, y_2)$ se definen por las ecuaciones:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \qquad [4]$$

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, y_1 x_2 + x_1 y_2). \qquad [5]$$

En particular, $(x, 0) + (0, y) = (x, y)$ y $(0, 1)(y, 0) = (0, y)$; luego

$$(x, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0). \qquad [6]$$

Nótese que las operaciones definidas por las ecuaciones [4] y [5] son las usuales cuando se restringen a los números reales:

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0),$$
$$(x_1, 0)(x_2, 0) = (x_1x_2, 0).$$

El sistema de los números complejos es, en consecuencia, una extensión natural del de los números reales.

Pensando en un número real como x o como $(x, 0)$, y *denotando por i el número imaginario puro* $(0, 1)$, podemos reescribir la Ecuación [6] así*

$$(x, y) = x + iy. \qquad [7]$$

Asimismo, con el convenio $z^2 = zz$, $z^3 = zz^2$, etc., hallamos que

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0);$$

es decir,

$$i^2 = -1.$$

A la vista de la expresión [7], las Ecuaciones [6] y [7] se convierten en

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \qquad [8]$$
$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(y_1x_2 + x_1y_2). \qquad [9]$$

Obsérvese que los miembros de la derecha en esas ecuaciones se pueden obtener formalmente manipulando los términos de la izquierda como si sólo contuvieran números reales, y sustituyendo i^2 por -1 cuando aparezca.

2. PROPIEDADES ALGEBRAICAS

Varias propiedades de la suma y del producto de números complejos coinciden con las de los números reales. Recogeremos aquí las más básicas y verificamos algunas de ellas.

Las leyes conmutativas

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \quad z_1z_2 = z_2z_1 \qquad [1]$$

* En electrónica se utiliza el símbolo j en lugar de i.

y las asociativas

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), \quad (z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3) \qquad [2]$$

se siguen fácilmente de las definiciones de la suma y el producto de números complejos, y del hecho de que los números reales las satisfacen. Por ejemplo, si

$$z_1 = (x_1, y_1) \quad \text{y} \quad z_2 = (x_2, y_2),$$

entonces

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_2 + x_1, y_2 + y_1)$$
$$= (x_2, y_2) + (x_1, y_1) = z_2 + z_1.$$

La verificación de las restantes, así como de la ley distributiva

$$z(z_1 + z_2) = zz_1 + zz_2, \qquad [3]$$

es similar.

De acuerdo con la ley conmutativa del producto, $iy = yi$; luego está permitido escribir

$$z = x + iy \quad \text{o} \quad z = x + yi.$$

Además, por las leyes asociativas, una suma $z_1 + z_2 + z_3$ o un producto $z_1z_2z_3$ están bien definidos sin paréntesis, igual que ocurría con los números reales.

La identidad aditiva $0 = (0, 0)$ y la identidad multiplicativa $1 = (1, 0)$ de los números reales se transfieren al sistema de los números complejos. O sea,

$$z + 0 = z \quad \text{y} \quad z \cdot 1 = z \qquad [4]$$

para todo número complejo z. Más aún, 0 y 1 son los únicos números complejos con tales propiedades. Para establecer la unicidad de 0, supongamos que (u, v) es una identidad aditiva, y escribamos

$$(x, y) + (u, v) = (x, y),$$

donde (x, y) es cualquier número complejo. Se deduce que

$$x + u = x \quad \text{e} \quad y + v = y;$$

o sea, $u = 0$ y $v = 0$. El número complejo $0 = (0, 0)$ es, por tanto, la única identidad aditiva.

Cada número complejo $z = (x, y)$ tiene asociado un inverso aditivo

$$-z = (-x, -y) \qquad [5]$$

que satisface la ecuación $z + (-z) = 0$. Además, hay un sólo inverso aditivo para cada z, pues la ecuación $(x, y) + (u, v) = (0, 0)$ implica que $u = -x$ y $v = -y$. Los inversos aditivos se usan para definir la resta:

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2). \qquad [6]$$

Luego si $z_1 = (x_1, y_1)$ y $z_2 = (x_2, y_2)$, entonces

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2, y_1 - y_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2). \qquad [7]$$

Análogamente, para todo número complejo $z = (x, y)$ no nulo, existe un número complejo z^{-1} tal que $zz^{-1} = 1$. Este inverso multiplicativo es menos obvio que el aditivo. Para hallarlo, buscamos números reales u, v expresados en términos de x e y, tales que

$$(x, y)(u, v) = (1, 0).$$

Según la Ecuación [5] de la Sección 1, que define el producto de dos números complejos, u y v han de satisfacer el par

$$xu - yv = 1, \quad yu + xv = 0$$

de ecuaciones lineales simultáneas; y un sencillo cálculo proporciona la única solución

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

De modo que el inverso multiplicativo de $z = (x, y)$ es

$$z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}\right) \quad (z \neq 0). \qquad [8]$$

La existencia de inversos multiplicativos nos capacita para demostrar que *si un producto z_1z_2 es cero, entonces al menos uno de los factores, z_1 o z_2, es cero.* Porque supongamos que $z_1z_2 = 0$ y que $z_1 \neq 0$. El inverso multiplicativo z_1^{-1} existe y, según la definición de la multiplicación, todo número complejo por cero da cero. Luego

$$z_2 = 1 \cdot z_2 = (z_1^{-1}z_1)z_2 = z_1^{-1}(z_1z_2) = z_1^{-1} \cdot 0 = 0. \qquad [9]$$

Esto es, si $z_1z_2 = 0$, o bien $z_1 = 0$ o $z_2 = 0$, o quizá ambos son cero. Otra forma de enunciar este resultado es decir que si dos números complejos son distintos de cero, su producto también es distinto de cero.

La división por un número complejo no nulo se define mediante:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1z_2^{-1} \quad (z_2 \neq 0). \qquad [10]$$

Si $z_1 = (x_1, y_1)$ y $z_2 = (x_2, y_2)$, las Ecuaciones [8] y [10] prueban que

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right) = \left(\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right) + i\left(\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right)$$
$$(z_2 \neq 0). \qquad [11]$$

El cociente z_1/z_2 no está definido cuando $z_2 = 0$; nótese que $z_2 = 0$ significa que $x_2^2 + y_2^2 = 0$, y esto no está permitido en las expresiones [11].

Finalmente, mencionamos algunas identidades relativas a los cocientes, no por esperadas menos útiles. Están basadas en la relación

$$\frac{1}{z_2} = z_2^{-1} \quad (z_2 \neq 0), \qquad [12]$$

que es la Ecuación [10] para $z_1 = 1$, y que nos permite escribir esa ecuación en la forma

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1\left(\frac{1}{z_2}\right) \quad (z_2 \neq 0). \qquad [13]$$

Observando que (véase Ejerc. 11)

$$(z_1z_2)(z_1^{-1}z_2^{-1}) = (z_1z_1^{-1})(z_2z_2^{-1}) = 1 \quad (z_1 \neq 0, z_2 \neq 0),$$

y que, por tanto, $(z_1z_2)^{-1} = z_1^{-1}z_2^{-1}$, uno puede usar la relación [12] para comprobar la identidad

$$\frac{1}{z_1z_2} = \left(\frac{1}{z_1}\right)\left(\frac{1}{z_2}\right) \quad (z_1 \neq 0, z_2 \neq 0). \qquad [14]$$

Con la ayuda de las Ecuaciones [13] y [14], es ya fácil mostrar que

$$\frac{z_1 + z_2}{z_3} = \frac{z_1}{z_3} + \frac{z_2}{z_3}, \quad \frac{z_1z_2}{z_3z_4} = \left(\frac{z_1}{z_3}\right)\left(\frac{z_2}{z_4}\right) \quad (z_3 \neq 0, z_4 \neq 0). \qquad [15]$$

Ejemplo. Cálculos como el que sigue quedan ahora justificados:

$$\left(\frac{1}{2 - 3i}\right)\left(\frac{1}{1 + i}\right) = \frac{1}{5 - i} = \left(\frac{1}{5 - i}\right)\left(\frac{5 + i}{5 + i}\right) = \frac{5 + i}{26} = \frac{5}{26} + \frac{1}{26}i.$$

EJERCICIOS

1. Comprobar que:

   a) $(\sqrt{2} - i) - i(1 - \sqrt{2}i) = -2i$; *b)* $(2, -3)(-2, 1) = (-1, 8)$;

   c) $(3, 1)(3, -1)\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{10}\right) = (2, 1)$; *d)* $\frac{1 + 2i}{3 - 4i} + \frac{2 - i}{5i} = -\frac{2}{5}$;

   e) $\frac{5}{(1 - i)(2 - i)(3 - i)} = \frac{i}{2}$; *f)* $(1 - i)^4 = -4$.

2. Demostrar que $(1 + z)^2 = 1 + 2z + z^2$.

3. Comprobar que los números complejos $z = 1 \pm i$ satisfacen la ecuación $z^2 - 2z + 2 = 0$.

4. Resolver la ecuación $z^2 + z + 1 = 0$ para $z = (x, y)$ escribiendo

$$(x, y)(x, y) + (x, y) + (1, 0) = (0, 0)$$

y resolviendo entonces un par de ecuaciones lineales simultáneas en x e y.
Sugerencia: Nótese que ningún número real x satisface la ecuación dada para probar que $y \neq 0$.

$$\textit{Sol.}\quad z = \left(-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

5. Probar que la multiplicación es conmutativa, tal como se afirmó en la segunda Ecuación[1], Sección 2.

6. Verificar la ley asociativa de la suma, enunciada en la primera de las Ecuaciones [2], Sección 2.

7. Verificar la ley distributiva [3], Sección 2.

8. Usar la ley asociativa de la suma y la ley distributiva para demostrar que

$$z(z_1 + z_2 + z_3) = zz_1 + zz_2 + zz_3.$$

9. Probar que el número complejo $1 = (1, 0)$ es la única identidad multiplicativa.
Sugerencia: Nótese que si (u, v) es un inverso multiplicativo, entonces en particular,

$$(1, 0)(u, v) = (1, 0).$$

10. Probar que:

    a) $\operatorname{Im}(iz) = \operatorname{Re} z$; *b)* $\operatorname{Re}(iz) = -\operatorname{Im} z$;

    c) $\frac{1}{1/z} = z \quad (z \neq 0)$; *d)* $(-1)z = -z$.

11. Mediante las leyes asociativa y conmutativa del producto, probar que

$$(z_1 z_2)(z_3 z_4) = (z_1 z_3)(z_2 z_4).$$

12. Demostrar que si $z_1 z_2 z_3 = 0$, entonces al menos uno de los factores es nulo.

13. Comprobar la identidad [14], Sección 2.

14. Establecer la primera de las identidades [15], Sección 2.

15. Probar la segunda de las identidades [15] de la Sección 2, y usarla para demostrar la ley de cancelación

$$\frac{zz_1}{zz_2} = \frac{z_1}{z_2} \quad (z \neq 0, z_2 \neq 0).$$

16. Establecer por inducción matemática la fórmula del binomio

$$(z_1 + z_2)^n = z_1^n + \frac{n}{1!} z_1^{n-1} z_2 + \frac{n(n-1)}{2!} z_1^{n-2} z_2^2 + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} z_1^{n-k} z_2^k + \cdots + z_2^n,$$

donde z_1 y z_2 son número complejos arbitrarios, y n es un entero positivo ($n = 1, 2, \ldots$).

3. INTERPRETACION GEOMETRICA

Es natural asociar el número complejo $z = x + iy$ con un punto del plano cuyas coordenadas rectangulares son x e y. Cada número complejo corresponde a un punto exactamente, y recíprocamente. El número $-2 + i$, por ejemplo, viene representado por el punto $(-2, 1)$ en la Figura 1. El número z puede pensarse como el segmento dirigido, o vector, que va desde el origen hasta el punto (x, y). De hecho, a menudo nos referiremos al número complejo como el punto z o como el vector z. Cuando se utiliza a efectos de representar geométricamente los números $z = x + iy$, el plano xy se llama *plano complejo* o *plano z*. El eje x se llama *eje real*, y el eje y se llama *eje imaginario*.

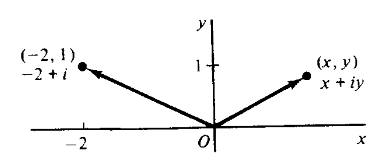

Figura 1

De acuerdo con la definición de suma de dos números complejos $z_1 = x_1 + y_1$ y $z_2 = x_2 + y_2$, el número $z_1 + z_2$ corresponde al punto $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$. Corresponde, asimismo, a un vector con esas coordenadas como componentes. Por tanto, $z_1 + z_2$ se puede obtener vectorialmente como indica la Figura 2. La diferencia $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$ corresponde a la suma de los vectores de z_1 y $-z_2$ (Fig. 3). Hagamos notar que, trasladando el radio vector $z_1 - z_2$ en la Figura 3, cabe interpretar $z_1 - z_2$ como el segmento dirigido desde el punto (x_2, y_2) hasta el (x_1, y_1).

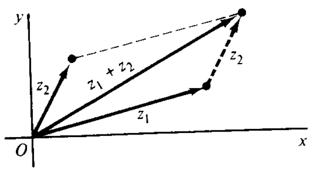

Figura 2

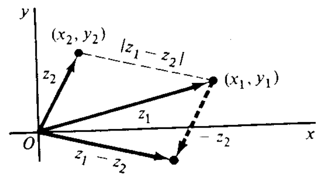

Figura 3

Aunque el producto de dos números complejos z_1 y z_2 es el mismo número complejo representado por un vector, ese vector está en el mismo plano que los vectores de z_1 y z_2. Es evidente, pues, que ese producto no es ni el producto escalar ni el producto vectorial que se usan en el análisis vectorial ordinario. La interpretación geométrica del producto de z_1 y z_2 se discutirá en la Sección 5.

El *módulo*, o valor absoluto, de un número complejo $z = x + iy$ se define como el número real ~~negativo~~ $\sqrt{x^2 + y^2}$ y se denota $|z|$; esto es,

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}. \qquad [1]$$

Geométricamente, el número $|z|$ es la distancia entre el punto (x, y) y el origen, o sea, la longitud del vector que representa a z. Se reduce al valor absoluto usual de los números reales cuando $y = 0$. Nótese que mientras *la desigualdad* $z_1 < z_2$ *carece de sentido a menos que* z_1 *y* z_2 *sean ambos reales*, es decir, que $|z_1| < |z_2|$ significa que el punto z_1 está más cerca del origen que z_2.

Ejemplo 1. Como $|-3 + 2i| = \sqrt{13}$ y $|1 + 4i| = \sqrt{17}$, el punto $-3 + 2i$ está más próximo del origen que $1 + 4i$.

La distancia entre dos puntos $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$ es $|z_1 - z_2|$. Eso es claro a la vista de la Figura 3, porque $|z_1 - z_2|$ es la longitud del vector que representa a $z_1 - z_2$. Alternativamente, se deduce de la definición [1] y de la expresión

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

que

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Los números complejos z correspondientes a los puntos del círculo con centro en el origen y radio R, satisfacen la ecuación $|z - z_0| = R$, y recíprocamente. Nos referiremos a ese conjunto de puntos como el círculo $|z - z_0| = R$.

Ejemplo 2. La ecuación $|z - 1 + 3i| = 2$ representa el círculo centrado en $z_0 = (1, -3)$ y de radio $R = 2$.

De la definición [1] se sigue que los números reales $|z|$, $\text{Re}\, z = x$, e $\text{Im}\, z = y$ están relacionados por la ecuación

$$|z|^2 = (\text{Re}\, z)^2 + (\text{Im}\, z)^2. \qquad [2]$$

Así pues

$$\text{Re}\, z \leqq |\text{Re}\, z| \leqq |z|, \quad \text{Im}\, z \leqq |\text{Im}\, z| \leqq |z|. \qquad [3]$$

El *complejo conjugado*, o simplemente el conjugado, de un número complejo $z = x + iy$ se define como el número complejo $x - iy$, denotado por $\bar{z}$; esto es,

$$\bar{z} = x - iy. \qquad [4]$$

El número $\bar{z}$ viene representado por el punto $(x, -y)$, reflejado en la recta real del punto (x, y) que representaba a z (Fig. 4). Nótese que $\bar{\bar{z}} = z$ y $|\bar{z}| = |z|$ para todo z.

Si $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$, entonces

$$\overline{z_1 + z_2} = (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2) = (x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2).$$

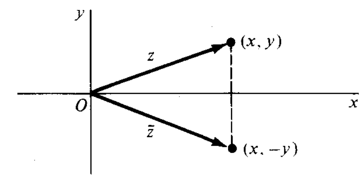

Figura 4

Así que el conjugado de la suma es la suma de los conjugados:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2. \qquad [5]$$

Del mismo modo, es fácil ver que

$$\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2, \qquad [6]$$

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \qquad [7]$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \quad (z_2 \neq 0). \qquad [8]$$

La suma $z + \bar{z}$ de un número complejo y su conjugado es el número real $2x$, y la diferencia $z - \bar{z}$ es el número imaginario puro $2iy$. Por tanto,

$$\text{Re}\, z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \text{Im}\, z = \frac{z - \bar{z}}{2i}. \qquad [9]$$

Una identidad importante que relaciona el conjugado de un número complejo con su módulo es

$$z\bar{z} = |z|^2, \qquad [10]$$

donde cada lado es igual a $x^2 + y^2$. Proporciona otro método de determinar el cociente z_1/z_2 en las expresiones [11], Sección 2. El procedimiento consiste en multiplicar numerador y denominador por $\bar{z}_2$, de manera que el denominador se convierte en el número real $|z_2|^2$.

Ejemplo 3. Como ilustración,

$$\frac{-1+3i}{2-i} = \frac{(-1+3i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{-5+5i}{|2-i|^2} = \frac{-5+5i}{5} = -1+i.$$

Véase también el ejemplo del final de la Sección 2.

Con ayuda de la identidad [10], podemos obtener fácilmente otras propiedades de los módulos a partir de las de los conjugados ya vistos. Mencionemos que

$$|z_1z_2| = |z_1||z_2|, \qquad [11]$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad (z_2 \neq 0). \qquad [12]$$

Para establecer la propiedad [11], escribimos

$$|z_1z_2|^2 = (z_1z_2)\overline{(z_1z_2)} = (z_1\bar{z}_1)(z_2\bar{z}_2) = |z_1|^2|z_2|^2 = (|z_1||z_2|)^2$$

y recordemos que un módulo nunca es negativo. La propiedad [12] es verificable de forma análoga.

4. DESIGUALDAD TRIANGULAR

Las propiedades de los módulos y de los conjugados de la Sección 3 hacen posible deducir algebraicamente la *desigualdad triangular*, que proporciona una cota superior al módulo de la suma de dos números complejos z_1 y z_2:

$$|z_1 + z_2| \leqq |z_1| + |z_2|. \qquad [1]$$

Esta importante desigualdad es geométricamente evidente de la Figura 2 de la Sección 3. En efecto, es sencillamente la afirmación de que la longitud de un lado de un triángulo es menor que la suma de las longitudes de los otros dos lados. Vemos en la Figura 2 que [1] es realmente una igualdad cuando los puntos z_1, z_2 y 0 son colineales.

Iniciamos la deducción algebraica escribiendo

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2)$$

y efectuando el producto de la derecha. Eso lleva a

$$|z_1 + z_2|^2 = z_1\bar{z}_1 + (z_1\bar{z}_2 + \overline{z_1\bar{z}_2}) + z_2\bar{z}_2.$$

Ahora bien

$$z_1\bar{z}_2 + \overline{z_1\bar{z}_2} = 2\text{Re}\,(z_1\bar{z}_2) \leqq 2|z_1\bar{z}_2| = 2|z_1||z_2|;$$

luego

$$|z_1 + z_2|^2 \leqq |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2,$$

o sea,

$$|z_1 + z_2|^2 \leqq (|z_1| + |z_2|)^2.$$

Como los módulos son no negativos, se deduce la desigualdad [1].

La desigualdad triangular se puede generalizar por medio de la inducción matemática a sumas de cualquier número finito de términos:

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leqq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n| \quad (n = 2, 3, \ldots). \qquad [2]$$

Para entrar en los detalles de la demostración, digamos que cuando $n = 2$, la desigualdad [2] es justamente la desigualdad [1]. Además, si se supone que [2] es válida cuando $n = m$, ha de serlo también para $n = m + 1$, puesto que por la desigualdad triangular,

$$\begin{aligned}|(z_1 + z_2 + \cdots + z_m) + z_{m+1}| &\leqq |z_1 + z_2 + \cdots + z_m| + |z_{m+1}| \\ &\leqq (|z_1| + |z_2| + \cdots + |z_m|) + |z_{m+1}|.\end{aligned}$$

También se desprende de [1] que

$$|z_1 + z_2| \geqq ||z_1| - |z_2||. \qquad [3]$$

Para deducir la desigualdad [3], escribimos

$$|z_1| = |(z_1 + z_2) + (-z_2)| \leqq |z_1 + z_2| + |-z_2|,$$

de modo que

$$|z_1 + z_2| \geqq |z_1| - |z_2|. \qquad [4]$$

Esta es la desigualdad [3] cuando $|z_1| \geqq |z_2|$. Si $|z_1| < |z_2|$, necesitamos sólo intercambiar z_1 y z_2 en [4] para obtener

$$|z_1 + z_2| \geqq -(|z_1| - |z_2|),$$

que es el resultado deseado. La desigualdad [3] nos dice, naturalmente, que la longitud de un lado de un triángulo es mayor o igual que la diferencia entre las longitudes de los otros dos lados. (Véase Fig. 2 de la Sec. 3.)

Se obtienen formas alternativas útiles de las desigualdades [1] y [3] al sustituir z_2 por $-z_2$:

$$|z_1 - z_2| \leqq |z_1| + |z_2|, \qquad [5]$$

$$|z_1 - z_2| \geqq ||z_1| - |z_2||. \qquad [6]$$

Ejemplo. Si un punto z está en el círculo unidad $|z| = 1$ centrado en el origen, entonces

$$|z^2 + z + 1| \leqq |z|^2 + |z| + 1 = 3$$

y

$$|z^3 - 2| \geqq ||z|^3 - 2| = 1.$$

EJERCICIOS

1. Localizar los números $z_1 + z_2$ y $z_1 - z_2$ vectorialmente, si:

   a) $z_1 = 2i, z_2 = \frac{2}{3} - i$; *b)* $z_1 = (-\sqrt{3}, 1), z_2 = (\sqrt{3}, 0)$;
   c) $z_1 = (-3, 1), z_2 = (1, 4)$; *d)* $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_1 - iy_1$.

2. Probar que:

   a) $\overline{\bar{z} + 3i} = z - 3i$; *b)* $\overline{iz} = -i\bar{z}$; *c)* $\overline{(2 + i)^2} = 3 - 4i$;
   d) $|(2\bar{z} + 5)(\sqrt{2} - i)| = \sqrt{3}|2z + 5|$.

3. Verificar las desigualdades [3], Sección 3, relativas a Re z, Im z y $|z|$.

4. Probar que $\sqrt{2}|z| \geqq |\text{Re } z| + |\text{Im } z|$.

5. Comprobar las propiedades [6] y [7] de $\bar{z}$ en la Sección 3.

6. Probar que:

   a) z es real si y sólo si $\bar{z} = z$;
   b) z es real o imaginario puro si y sólo si $(\bar{z}^2) = z^2$.

7. Usar la propiedad $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$ para verificar que: *a)* $\overline{z_1 z_2 z_3} = \bar{z}_1 \bar{z}_2 \bar{z}_3$; *b)* $\overline{(z^4)} = (\bar{z})^4$.

8. Verificar la propiedad [12] de los módulos, Sección 3.

9. Usar los resultados de la Sección 3 para demostrar que cuando z_1 y z_2 son no nulos:

   a) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2 z_3}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2 \bar{z}_3}$; *b)* $\left|\dfrac{z_1}{z_2 z_3}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2||z_3|}$.

10. Con ayuda de las desigualdades de la Sección 4, probar que cuando $|z_3| \neq |z_4|$,

$$\left|\frac{z_1 + z_2}{z_3 + z_4}\right| \leqq \frac{|z_1| + |z_2|}{||z_3| - |z_4||}.$$

11. En cada caso, esbozar el conjunto de puntos determinado por la condición expuesta:

    a) $|z - 1 + i| = 1$; *b)* $|z + i| \leqq 3$; *c)* Re $(\bar{z} - i) = 2$;
    d) $|2z - i| = 4$.

12. Aplicar las desigualdades de las Secciones 3 y 4 para demostrar que

$$|\text{Im } (1 - \bar{z} + z^2)| < 3 \quad \text{cuando} \quad |z| < 1.$$

13. Factorizando $z^4 - 4z^2 + 3$ en dos factores cuadráticos y usando entonces la desigualdad [6] de la Sección 4, probar que si z está en el cículo $|z| = 2$, entonces

$$\left|\frac{1}{z^4 - 4z^2 + 3}\right| \leqq \frac{1}{3}.$$

14. En la Sección 2 se demuestra que si $z_1 z_2 = 0$, al menos uno de los factores ha de ser cero. Dar otra demostración basada en el resultado análogo para los números reales, mediante la identidad [11], Sección 3.

15. Probar por inducción que cuando $n = 2, 3, \ldots$,

    a) $\overline{z_1 + z_2 + \cdots + z_n} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \cdots + \bar{z}_n$; *b)* $\overline{z_1 z_2 \cdots z_n} = \bar{z}_1 \bar{z}_2 \cdots \bar{z}_n$.

16. Sean $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n (n \geqq 1)$ números *reales*, y z cualquier número complejo. Con la ayuda de los resultados del Ejercicio 15, probar que

$$\overline{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n} = a_0 + a_1 \bar{z} + a_2 \bar{z}^2 + \cdots + a_n \bar{z}^n.$$

17. Demostrar que la ecuación $|z - z_0| = R$ del círculo con centro en z_0 y radio R, se puede escribir

$$|z|^2 - 2\text{Re } (z\bar{z}_0) + |z_0|^2 = R^2.$$

18. Usando las expresiones [9], Sección 3, para Re z e Im z, probar que la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ puede escribirse

$$z^2 + \bar{z}^2 = 2.$$

19. Usando el hcho de que $|z_1 - z_2|$ es la distancia entre los puntos z_1 y z_2, dar un argumento geométrico para ver que

    a) la ecuación $|z - 4i| + |z + 4i| = 10$ representa una elipse con focos en $(0, \pm 4)$;

b) la ecuación $|z-1| = |z+i|$ representa la recta de pendiente -1 que pasa por el origen.

5. FORMA POLAR

Sean r y θ coordenadas polares del punto (x, y) que corresponde a un número complejo no nulo $z = x + iy$. Como

$$x = r\cos\theta \quad \text{e} \quad y = r \operatorname{sen}\theta, \qquad [1]$$

z puede ser expresado en forma polar como

$$z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta). \qquad [2]$$

En análisis complejo, no se admiten r negativos; sin embargo, como en el Cálculo, θ tiene infinitos valores posibles, incluyendo valores negativos.

Ejemplo 1. El número complejo $1 - i$, que está en el cuarto cuadrante, pasa a ser

$$1 - i = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] \qquad [3]$$

en forma polar. Obsérvese que cualquiera de los valores

$$\theta = -\frac{\pi}{4} + 2n\pi \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

puede ser usado aquí. Por ejemplo,

$$1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}\right).$$

El número positivo r es la longitud del vector correspondiente a z; es decir, $r = |z|$. El número θ se llama un *argumento* de z, y escribimos $\theta = \arg z$. Así pues, geométricamente, $\arg z$ denota el ángulo, medido en radianes, que forma z con el eje real positivo, cuando z se interpreta como un radio vector (Fig. 5). Toma cualquier valor de entre infinitos posibles, que difieren dos a dos en múltiplos de 2π. Estos valores se pueden determinar mediante la ecuación

$$\tan\theta = \frac{y}{x}, \qquad [4]$$

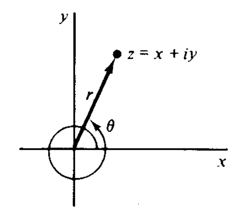

Figura 5

donde el cuadrante que contiene al punto correspondiente a z debe ser especificado. En general, entonces, si

$$z = r[\cos(\theta + 2n\pi) + i\operatorname{sen}(\theta + 2n\pi)] \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \quad [5]$$

donde r es el módulo de z y θ es cualquier valor particular de $\arg z$.

Si $z = 0$, θ es indefinido. De modo que cualquier número complejo que vaya a ser escrito en polares se sobreentiende que es distinto de cero, aunque tal requisito no se haga explícito.

El *valor principal* de $\arg z$, denotado $\operatorname{Arg} z$, se define como el único valor de $\arg z$ tal que $-\pi < \arg z \leqq \pi$. El valor principal se ha usado en la expresión [3] para el número $1 - i$. Nótese que $\arg z = \operatorname{Arg} z + 2n\pi$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Asimismo, cuando z es un número real negativo, $\operatorname{Arg} z = \pi$.

Vamos ahora con una importante identidad sobre los argumentos, a saber,

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2. \qquad [6]$$

Debe interpretarse diciendo que si se especifican dos de esos tres argumentos (multivaluados), entonces existe un valor del tercer argumento que satisface la ecuación.

Para demostrarlo, partimos de z_1 y z_2 en forma polar:

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1), \qquad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2). \qquad (7)$$

Efectuando el producto se ve que

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2) + i(\operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\operatorname{sen}\theta_2)],$$

y esto se reduce a la forma polar del producto

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)] \qquad [8]$$

Ahora bien, θ_1 y θ_2 pueden ser valores cualesquiera de $\arg z_1$ y $\arg z_2$, respectivamente, y queda claro por la Ecuación (8) que $\theta_1 + \theta_2$ es un valor de $\arg(z_1 z_2)$ (véase Fig. 6).

Si, por otra parte, se especifican valores de $\arg(z_1 z_2)$ y de $\arg z_1$, esos valores corresponden a elecciones particulares de n y n_1 en las expresiones

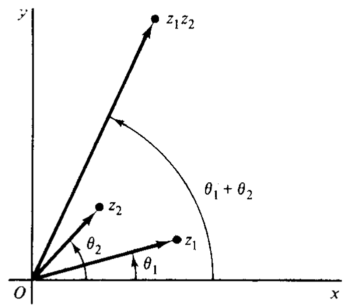

Figura 6

$$\arg(z_1z_2) = (\theta_1 + \theta_2) + 2n\pi \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$
$$\arg z_1 = \theta_1 + 2n_1\pi \qquad (n_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Como

$$(\theta_1 + \theta_2) + 2n\pi = (\theta_1 + 2n_1\pi) + [\theta_2 + 2(n - n_1)\pi],$$

la Ecuación [6] se satisface obviamente cuando se escoge el valor

$$\arg z_2 = \theta_2 + 2(n - n_1)\pi.$$

El caso en que se especifican valores de $\arg(z_1z_2)$ y $\arg z_2$ se trata de manera análoga. Eso completa la demostración.

La afirmación [6] no siempre es válida cuando se sustituye arg por Arg, como ilustra el próximo ejemplo.

Ejemplo 2. Si $z_1 = -1$ y $z_2 = i$,

$$\operatorname{Arg}(z_1z_2) = \operatorname{Arg}(-i) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{pero} \quad \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}.$$

No obstante, si tomamos los valores usados para z_1 y $\arg z_2$ y elegimos el valor $\arg(z_1z_2) = 3\pi/2$, la Ecuación [6] queda satisfecha.

Cuando se multiplica un número complejo no nulo $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ por i, el radio vector de iz se obtiene girando el de z un ángulo recto en el sentido positivo (contrario a las agujas de un reloj), sin cambiar su longitud. Ello se debe a que

$$i = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right);$$

y, de acuerdo con la Ecuación [8],

$$iz = r\left[\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right].$$

La Ecuación [8] enseña también que la forma polar del único inverso multiplicativo de un número complejo no nulo

$$z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$

es

$$z^{-1} = \frac{1}{r}[\cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta)], \qquad [9]$$

siendo el producto de estas formas polares igual a la unidad. Como $z_1/z_2 = z_1z_2^{-1}$, tenemos la siguiente expresión para el cociente de los dos números complejos no nulos [7]:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)]. \qquad [10]$$

Esto puede utilizarse para comprobar la afirmación

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2, \qquad [11]$$

que es análoga a la [6].

6. FORMA EXPONENCIAL

La ecuación

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta, \qquad [1]$$

que define el símbolo $e^{i\theta}$, o $\exp(i\theta)$. para todo valor real de θ, se conoce como *fórmula de Euler*. Si escribimos un número complejo no nulo en forma polar

$$z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta), \qquad [2]$$

la fórmula de Euler permite expresar z más compactamente en *forma exponencial:*

$$z = re^{i\theta}. \qquad [3]$$

La elección del símbolo $e^{i\theta}$ quedará justificada en la Sección 22. Notemos simplemente aquí unas pocas de sus propiedades que al menos sugieren que es una elección natural.

La propiedad aditiva

$$e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)} \tag{4}$$

es otra manera de expresar [8], Sección 5, para el producto de dos números complejos z_1 y z_2 cuando los módulos r_1 y r_2 son la unidad:

$$(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2) = \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2).$$

Escribiendo $e^{-i\theta}$ en lugar de $e^{i(-\theta)}$, deducimos de la Ecuación [4] que $e^{i\theta}e^{-i\theta} = 1$; luego $1/e^{i\theta} = e^{-i\theta}$.

Observemos que la forma polar [9], Sección 5, del inverso multiplicativo de un número complejo no nulo $z = re^{i\theta}$ es

$$z^{-1} = \frac{1}{r}e^{i(-\theta)} = \frac{1}{r}e^{-i\theta} \qquad [5]$$

en notación exponencial. Análogamente, cuando $z_1 = r_1 \exp(i\theta_1)$ y $z_2 = r_2 \exp(i\theta_2)$, las expresiones [8] y [10] de la Sección 5 pueden escribirse

$$z_1z_2 = r_1r_2 \exp[i(\theta_1 + \theta_2)], \qquad [6]$$

y

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\exp[i(\theta_1 - \theta_2)], \qquad [7]$$

respectivamente. Una importante ventaja de las expresiones [5], [6] y [7] sobre sus contrapartidas de la Sección 5 consiste en la facilidad de retenerlas y usarlas de memoria. Al igual que la propiedad [4], se obtienen formalmente aplicando las reglas algebraicas usuales para los números reales y para $\exp x$.

En vista de la representación polar (Sec. 5)

$$z = r[\cos(\theta + 2n\pi) + i \operatorname{sen}(\theta + 2n\pi)] \qquad (n = 0, \pm1, \pm2, ...),$$

la expresión [3] es sólo una de las infinitas maneras posibles de la forma exponencial de z:

$$z = re^{i(\theta+2n\pi)} \qquad (n = 0, \pm1, \pm2, ...). \qquad [8]$$

Ello se sigue también geométricamente cuando θ se interpreta como el ángulo de inclinación del radio vector de longitud r representante del número $z = re^{i\theta}$. Porque está en el círculo de radio r centrado en el origen (Fig. 7), y si se aumenta θ, el punto z se mueve a lo largo del círculo en dirección contraria a la de las agujas del reloj. En particular, cuando θ crece en 2π, volvemos al punto de partida. Lo mismo es cierto, claro está si θ decrece en 2π. Resulta por tanto evidente de la Fig. 7 que *dos números complejos no nulos* $z_1 = r_1 \exp(i\theta_1)$ *y* $z_2 = r_2 \exp(i\theta_2)$ *son iguales si y sólo si* $r_1 = r_2$ *y* $\theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$, *donde k es un entero* ($k = 0, \pm1, \pm2, ...$).

La Figura 7, con $r = R$ muestra también que la ecuación

$$z = Re^{i\theta} \qquad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi) \qquad [9]$$

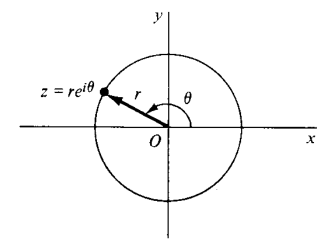

Figura 7

es una representación paramétrica del círculo $|z| = R$, centrado en el origen con radio R. Al crecer el parámetro θ en la Figura 7 a partir de 0 sobre el intervalo $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$, el punto z arranca del eje real positivo y recorre el círculo una vez en el sentido positivo (contrario al de las agujas del reloj). Más en general, el círculo $|z - z_0| = R$, cuyo centro es z_0 y cuyo radio es R, admite la representación paramétrica

$$z = z_0 + Re^{i\theta} \qquad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi). \qquad [10]$$

Esto puede verse vectorialmente (Fig. 8) sin más que observar que un punto z que recorre en sentido positivo el círculo una vez, corresponde a la suma del vector fijo z_0 y un vector de longitud R cuyo ángulo de inclinación θ varía desde $\theta = 0$ a $\theta = 2\pi$.

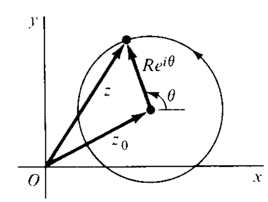

Figura 8

7. POTENCIAS Y RAICES

Las potencias enteras de un número complejo no nulo $z = re^{i\theta}$ vienen dadas por

$$z^n = r^n e^{in\theta} \qquad (n = 0, \pm1, \pm2, ...). \qquad [1]$$

Como $z^{n+1} = zz^n$ cuando $n = 1, 2, \ldots$ (Sec. 1), esto se comprueba fácilmente para valores positivos de n por inducción, con ayuda de la expresión [6], Sección 6, para el producto de números complejos en forma exponencial. La ecuación es válida también para $n = 0$ con el convenio de que $z^0 = 1$. Si $n = -1, -2, \ldots$, por otro lado, definimos z^n en términos del inverso multiplicativo de z escribiendo $z^n = (z^{-1})^m$, donde $m = -n = 1, 2, \ldots$ Entonces, como la Ecuación [1] es válida para potencias enteras *positivas*, se sigue de la forma exponencial de z^{-1} en la Sección 6 que

$$z^n = \left[\frac{1}{r}\, e^{i(-\theta)}\right]^m = \left(\frac{1}{r}\right)^m e^{im(-\theta)} = r^n e^{in\theta} \qquad (n = -1, -2, \ldots).$$

Por tanto, la Ecuación [1] es válida para toda potencia entera.

Nótese que si $r = 1$, la Ecuación [1] se convierte en

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \qquad [2]$$

Cuando se expresa en la forma

$$(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \qquad [3]$$

que se conoce como la *fórmula de De Moivre*.

La Ecuación [1] es útil para el cálculo de raíces de números complejos no nulos.

Ejemplo 1. Resolvamos la ecuación

$$z^n = 1, \qquad [4]$$

donde n tiene uno de los valores $n = 2, 3, \ldots$, hallando así las raíces n-ésimas de la unidad. Puesto que $z \neq 0$, podemos escribir $z = re^{i\theta}$ y buscar valores de r y θ tales que

$$(re^{i\theta})^n = 1,$$

o sea

$$r^n e^{in\theta} = 1e^{i0}.$$

Ahora bien, de acuerdo con la frase en bastardilla hacia el final de la Sección 6,

$$r^n = 1 \quad \text{y} \quad n\theta = 0 + 2k\pi,$$

donde k es cualquier entero ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Por tanto, $r = 1$ y $\theta = 2k\pi/n$; y se deduce que los números complejos

$$z = \exp\left(i\,\frac{2k\pi}{n}\right) \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

son raíces n-ésimas de la unidad. Tal como aparecen aquí, en forma exponencial, se ve inmediatamente que están en el círculo unidad centrado en el origen y están uniformemente espaciadas sobre él cada $2\pi/n$ radianes. Evidentemente, pues, todas las raíces n-ésimas de la unidad *distintas* entre sí se obtienen escribiendo

$$z = \exp\left(i\,\frac{2k\pi}{n}\right) = \cos\frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1), \qquad [5]$$

y no se obtienen ya nuevas raíces con otros valores de k.

Así que el número de raíces n-ésimas de la unidad es n. Cuando $n = 2$, esas raíces son, claro está, ± 1. Cuando $n \geqq 3$, corresponden a puntos situados en los vértices de un polígono regular de n lados. Este polígono está inscrito en el círculo unidad centrado en el origen y tiene un vértice en el punto correspondiente a la raíz $z = 1$ ($k = 0$). Si escribimos

$$\omega_n = \exp\left(i\,\frac{2\pi}{n}\right) \qquad [6]$$

y entonces observamos que, de acuerdo con la propiedad [2],

$$\omega_n^k = \exp\left(i\,\frac{2k\pi}{n}\right) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1),$$

vemos que las distintas raíces n-ésimas de la unidad son simplemente

$$1, \omega_n, \omega_n^2, \ldots, \omega_n^{n-1}.$$

Nótese que $\omega_n^n = 1$. Véase Figura 9 para la interpretación de las tres raíces cúbicas de la unidad como vértices de un triángulo equilátero. La Figura 10 ilustra el caso $n = 6$.

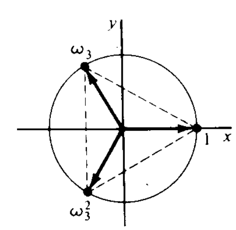

Figura 9

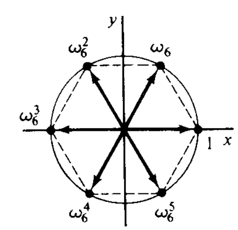

Figura 10

El método anterior puede usarse para hallar las raíces n-ésimas de cualquier número complejo no nulo $z_0 = r_0 \exp(i\theta_0)$. Tales raíces, que se obtienen resolviendo la ecuación

$$z^n = z_0 \qquad [7]$$

en z, son los números

$$c_k = \sqrt[n]{r_0} \exp\left[i\left(\frac{\theta_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right] \qquad (k = 0, 1, ..., n - 1), \qquad [8]$$

donde $\sqrt[n]{r_0}$ denota la raíz n-ésima *positiva* de r_0. El número $\sqrt[n]{r_0}$ es la longitud de cada radio vector representante de las n raíces. Un argumento de la primera raíz c_0 es θ_0/n, y los de las otras raíces se obtienen sumando múltiplos enteros de $2\pi/n$. Por consiguiente, al igual que ocurría con las raíces n-ésimas de la unidad, las raíces para $n = 2$ están siempre en extremos opuestos de un diámetro de un círculo, siendo una de ellas la negativa de la otra; y cuando $n \geqq 3$, están en los vértices de un polígono regular de n lados inscrito en el círculo de radio $\sqrt{r_0}$ centrado en el origen.

Si c es cualquier raíz n-ésima particular de z_0, el conjunto de todas las raíces n-ésimas se puede expresar

$$c, c\omega_n, c\omega_n^2, ..., c\omega_n^{n-1},$$

donde $\omega_n = \exp(i2\pi/n)$, tal como define la Ecuación [6]. Esto es así porque el producto de cualquier número complejo no nulo por ω_n corresponde a aumentar su argumento en $2\pi/n$.

Denotaremos por $z_0^{1/n}$ el conjunto de raíces n-ésimas de un número complejo no nulo z_0. En particular, si z_0 es un número real positivo r_0, el símbolo $r_0^{1/n}$ denota un conjunto de raíces, y el símbolo $\sqrt[n]{r_0}$ en la expresión [8] se reserva para la raíz positiva. Cuando el valor de θ_0 que se usa en [8] es el valor principal de arg z_0 $(-\pi < \theta_0 \leqq \pi)$, el número c_0 se suele llamar la raíz *n-ésima principal* de z_0. Así pues, cuando z_0 es un número real positivo, su raíz principal es $\sqrt[n]{r_0}$.

Finalmente, una forma conveniente de recordar la expresión [8] consiste en escribir z_0 en su forma exponencial más general (véase Sec. 6),

$$z_0 = r_0 \exp[i(\theta_0 + 2k\pi)] \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...), \qquad [9]$$

y aplicar formalmente las leyes de los exponentes racionales por los números reales, teniendo en cuenta que hay exactamente n raíces diferentes:

$$z_0^{1/n} = \sqrt[n]{r_0} \exp \frac{i(\theta_0 + 2k\pi)}{n} \qquad (k = 0, 1, 2, ..., n - 1) \qquad [10]$$

Ejemplo 2. Hallemos todos los valores de $(-8i)^{1/3}$, o sea, las tres raíces cúbicas de $-8i$. Basta escribir

$$-8i = 8 \exp\left[i\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right] \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$$

para ver que las raíces buscadas son

$$c_k = 2 \exp\left[i\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right] \qquad (k = 0, 1, 2).$$

En coordenadas rectangulares, pues,

$$c_0 = 2 \exp\left[i\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} - i \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} - i;$$

y, análogamente, encontramos que $c_1 = 2i$ y $c_2 = -\sqrt{3} - i$. Estas raíces están en los vértices de un triángulo equilátero inscrito en el círculo de radio 2 centrado en el origen (Fig. 11). La raíz principal es $c_0 = \sqrt{3} - i$.

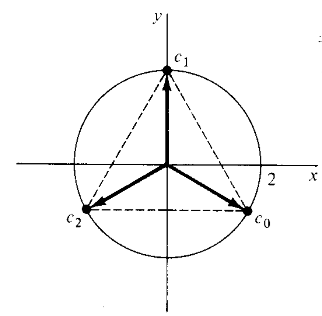

Figura 11

EJERCICIOS

1. Hallar un valor de arg z para

   a) $z = \dfrac{-2}{1 + \sqrt{3}i}$; *b)* $z = \dfrac{i}{-2 - 2i}$; *c)* $z = (\sqrt{3} - i)^6$.

   Sol. *a)* $2\pi/3$; *c)* π.

2. Expresando los factores individuales de la izquierda en forma exponencial, efectuar las operaciones requeridas, y cambiar finalmente a coordenadas rectangulares, para probar que

   a) $i(1 - \sqrt{3}i)(\sqrt{3} + i) = 2(1 + \sqrt{3}i)$; *b)* $5i/(2 + i) = 1 + 2i$;

c) $(-1 + i)^7 = -8(1 + i)$; *d)* $(1 + \sqrt{3}i)^{-10} = 2^{-11}(-1 \sqrt{3}i)$.

3. Hallar en cada caso todas las raíces en coordenadas rectangulares, dibujarlas en un plano, e indicar cuál es la principal:

a) $(2i)^{1/2}$; *b)* $(1 - \sqrt{3}i)^{1/2}$; *c)* $(-1)^{1/3}$; *d)* $(-16)^{1/4}$; *e)* $8^{1/6}$;

f) $(-8 - 8\sqrt{3}i)^{1/4}$.

Sol. *a)* $\pm(1 + i)$; *b)* $\pm\sqrt{3} - i)/\sqrt{2}$; *d)* $\pm\sqrt{2}(1 + i), \pm\sqrt{2}(1 - i)$;
e) $\pm\sqrt{2}, \pm(1 + \sqrt{3}i)/\sqrt{2}, \pm(-1 + \sqrt{3}i)/\sqrt{2}$; *f)* $\pm(\sqrt{3} - i), \pm(1 + \sqrt{3}i)$

4. Probar que

a) $|e^{i\theta}| = 1$; *b)* $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$; *c)* $(e^{i\theta})^2 = e^{i2\theta}$;

d) $e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} \cdots e^{i\theta}{}_n = e^{i(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)}$ $(n = 2, 3, \ldots)$.

5. Resolver la ecuación $|e^{i\theta}| = 2$ para $\theta(0 \leqq \theta < 2\pi)$ y verificar la solución geométricamente.

Sol. π.

6. Usar la fórmula de De Moivre (Sec. 7) para deducir las siguientes identidades trigonométricas:

a) $\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta \operatorname{sen}^2\theta$; *b)* $\operatorname{sen} 3\theta = 3\cos^2\theta \operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^3\theta$.

7. De acuerdo con la Sección 3, la diferencia $z - z_0$ de dos números complejos distintos admite interpretación vectorial (véase la Fig. 12, donde θ denota el ángulo de inclinación del vector representante de $z - z_0$). Trasladando el vector de $z - z_0$ de manera que sea un radio vector, probar que los valores de $\arg\overline{(z - z_0)}$ son los mismos que los de $-\arg(z - z_0)$. Con el mismo método, demostrar que

$$\operatorname{Arg}\overline{(z - z_0)} = -\operatorname{Arg}(z - z_0)$$

si y sólo si $z - z_0$ no es un número real negativo.

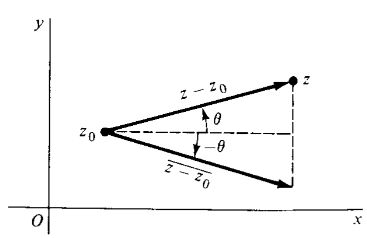

Figura 12

8. Probar que si $\operatorname{Re} z_1 > 0$ y $\operatorname{Re} z_2 > 0$, entonces

$$\operatorname{Arg}(z_1z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2,$$

donde $\operatorname{Arg}(z_1z_2)$ denota el valor principal de $\arg(z_1z_2)$, etc.

9. Comprobar la afirmación (Sec. 5)

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2.$$

10. Verificar la expresión [1], Sección 7, para z^n cuando $n = 1, 2, \ldots$

11. Obtener la expresión [8], Sección 7, para las raíces n-ésimas de z_0.

12. *a)* Sea a un número real fijo cualquiera. Probar que las dos raíces cuadradas de $a + i$ son $\pm\sqrt{A}\exp(i\alpha/2)$, donde $A = \sqrt{a^2 + 1}$ y $\alpha = \operatorname{Arg}(a + i)$.

b) Usando las identidades trigonométricas

$$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 + \cos\alpha}{2}, \quad \operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos\alpha}{2},$$

demostrar que las raíces cuadradas obtenidas en *a)* se pueden escribir

$$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{A + a} + i\sqrt{A - a}).$$

13. Según la Sección 7, las tres raíces cúbicas de un número complejo no nulo z_0 son c_0, $c_0\omega_3$, $c_0\omega_3^2$, donde c_0 es la raíz cúbica principal de z_0 y

$$\omega_3 = \exp\left(i\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}.$$

Probar que si $z_0 = -4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i$, entonces $c_0 = \sqrt{2}(1 + i)$ y las otras dos raíces son, en forma rectangular, los números

$$c_0\omega_3 = \frac{-(\sqrt{3} + 1) + (\sqrt{3} - 1)i}{\sqrt{2}}, \qquad c_0\omega_3^2 = \frac{(\sqrt{3} - 1) - (\sqrt{3} + 1)i}{\sqrt{2}}.$$

14. Hallar las cuatro raíces de la ecuación $z^4 + 4 = 0$, y usarlas para factorizar $z^4 + 4$ en factores cuadráticos con coeficientes reales.

Sol. $(z^2 + 2z + 2)(z^2 - 2z + 2)$.

15. Sabiendo que $z_1z_2 \neq 0$, usar la forma exponencial de z_1 y z_2 para demostrar que si y sólo si

$$\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) = |z_1||z_2|$$

si y sólo si $\theta_1 - \theta_2 = 2n\pi$ $(n = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$, donde $\theta_1 = \arg z_1$ y $\theta_2 = \arg z_2$.

16. Supuesto que $z_1z_2 \neq 0$, y recurriendo al resultado del Ejercicio 15, modificar la derivación de la desigualdad triangular [1], Sección 4, para probar que

a) $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$; *b)* $|z_1 - z_2| = ||z_1| - |z_2||$;

si y sólo si $\theta_1 - \theta_2 = 2n\pi$ $(n = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$, donde $\theta_1 = \arg z_1$ y $\theta_2 = \arg z_2$. Interpretar estas relaciones geométricamente.

17. Sea z un número complejo no nulo y n un entero negativo ($n = -1, -2, \ldots$). Escribamos además $z = re^{i\theta}$ y $m = -n = 1, 2, \ldots$

a) Usando $z^m = r^m e^{im\theta}$ y $z^{-1} = (1/r)e^{i(-\theta)}$, comprobar que $(z^m)^{-1} = (z^{-1})^m$ en la Sección 7, podría haberse escrito alternativamente como $z^n = (z^m)^{-1}$.

b) Definiendo $z^{1/n}$ mediante $z^{1/n} = (z^{-1})^{1/m}$ y probando que los m valores de $(z^{1/m})^{-1}$ y $(z^{-1})^{1/m}$ son los mismos, verificar que $z^{1/n} = (z^{1/m})^{-1}$.

18. Establecer la identidad

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \qquad (z \neq 1),$$

y usarla para deducir la *identidad trigonométrica de Lagrange:*

$$1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta = \frac{1}{2} + \frac{\sin[(2n+1)\theta/2]}{2\sin(\theta/2)} \qquad (0 < \theta < 2\pi).$$

Sugerencia: En cuanto a la primera identidad, escribir $S = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n$ y considerar la diferencia $S - zS$. Para deducir la segunda, escribir $z = e^{i\theta}$ en la primera.

19. Probar que si c es cualquier raíz n-ésima de la unidad distinta de la unidad, entonces

$$1 + c + c^2 + \cdots + c^{n-1} = 0.$$

Sugerencia: Utilizar la primera identidad del Ejercicio 18.

20. *a)* Probar que la fórmula cuadrática usual resuelve la ecuación cuadrática

$$az^2 + bz + c = 0 \qquad (a \neq 0)$$

cuando los coeficientes a, b y c son números complejos. En concreto, completando el cuadrado del lado izquierdo, demostrar que las raíces de esa ecuación son

$$z = \frac{-b + (b^2 - 4ac)^{1/2}}{2a},$$

donde se han considerado las dos raíces cuadradas cuando $b^2 - 4ac \neq 0$.

b) Usando *a)* hallar las raíces de la ecuación

$$z^2 + 2z + (1 - i) = 0.$$

Sol. *b)* $\left(-1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{i}{\sqrt{2}}, \left(-1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{i}{\sqrt{2}}$.

21. Probar que dos números complejos z_1 y z_2 tienen igual módulo si y sólo si existen números complejos c_1 y c_2 tales que $z_1 = c_1c_2$ y $z_2 = c_1\bar{c}_2$.

8. REGIONES EN EL PLANO COMPLEJO

En esta sección estaremos interesados en conjuntos de números complejos, o sea, de puntos en el plano, y su proximidad mutua. Nuestro instrumento esencial será el concepto de ε *entorno*

$$|z - z_0| < \varepsilon \qquad [1]$$

de un punto dado z_0. Consta de todos los puntos z que son interiores (sin estar sobre él) al círculo centrado en z_0 con radio prefijado (Fig. 13). Cuando el valor de ε queda sobreentendido o es irrelevante en la discusión, el conjunto [1] se citará como un entorno, simplemente. En ocasiones, conviene hablar de un *entorno punteado*

$$0 < |z - z_0| < \varepsilon, \qquad [2]$$

que consta de todos los puntos z de un ε entorno, excepto el propio z_0.

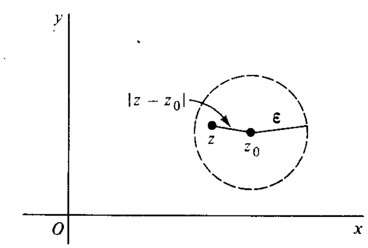

Figura 13

Se dice que un punto z_0 es un *punto interior* de un conjunto S siempre que exista algún entorno de z_0 cuyos puntos sean todos de S; se llamará un *punto exterior* de S cuando exista un entorno suyo que no contenga puntos de S. Si z_0 no es de ninguno de esos dos tipos, se llama un *punto frontera* de S. Un punto frontera es, por tanto, uno cuyos entornos contienen todos tanto puntos de S como puntos que no están en S. La totalidad de esos puntos frontera se llama la *frontera* de S. El círculo $|z| = 1$, por ejemplo, en la frontera de los conjuntos

$$|z| < 1 \quad \text{y} \quad |z| \leqq 1. \qquad [3]$$

Un conjunto es *abierto* si no contiene a ninguno de sus puntos frontera. Dejamos como ejercicio probar que un conjunto es abierto si y sólo si todos sus puntos son interiores. Un conjunto es *cerrado* si contiene a todos sus puntos frontera, y el *cierre* (o clausura) $\bar{S}$ de un conjunto S es el conjunto cerrado que consta de S y de todos sus puntos frontera. Nótese que el primero de los conjuntos [3] es abierto y que el segundo es el cierre de ambos.

Claro está que algunos conjuntos no son ni abiertos ni cerrados. Para que un conjunto no sea abierto, ha de contener alguno de sus puntos frontera; y para no ser cerrado, debe haber algún punto frontera que no esté en él. Observemos que el disco punteado $0 < |z| \leqq 1$ no es ni abierto ni cerrado. El conjunto de los números complejos es, por otra parte, abierto y cerrado a la vez, puesto que no tiene puntos frontera.

Un conjunto abierto S es *conexo* si cada par de puntos z_1 y z_2 en él se puede unir por una línea poligonal, consistente en un número finito de segmentos sucesivos, que está por entero contenida en S. El conjunto abierto $|z| < 1$ es conexo. El anillo $1 < |z| < 2$ es, claro está, abierto y también conexo (véase Figura 14). Un conjunto abierto y conexo se llama un *dominio*. Nótese que todo entorno es un dominio. Un dominio junto con algunos, ninguno, o todos sus puntos frontera, se llama una *región*.

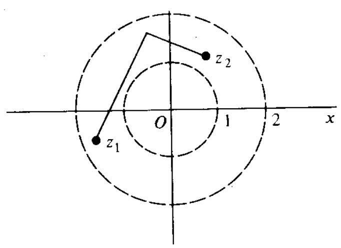

Figura 14

Un conjunto S es *acotado* si todo punto de S está dentro de algún círculo $|z| = R$; en caso contrario, es *no acotado*. Ambos conjuntos [3] son regiones acotadas.

Un punto z_0 se dice que es un *punto de acumulación* de un conjunto S si cada entorno punteado de z_0 contiene al menos un punto de S. Se sigue que si S es cerrado, entonces contiene a todos sus puntos de acumulación. Porque si un punto de acumulación z_0 no estuviese en S, sería un punto frontera de S, lo cual contradice el hecho de que un conjunto cerrado contiene todos sus puntos frontera. Dejamos como ejercicio probar que el recíproco es también cierto. Así pues, un conjunto es cerrado si y sólo si contiene a todos sus puntos de acumulación.

Evidentemente, un punto z_0 *no* es punto de acumulación de un conjunto S siempre que exista un entorno punteado de z_0 que no contenga puntos de S. Nótese que el origen es el único punto de acumulación del conjunto $z_n = i/n$ ($n = 1, 2, \ldots$).

EJERCICIOS

1. Representar los siguientes conjuntos y determinar cuáles de ellos son dominios:

   a) $|z - 2 + i| \leqq 1$; *b)* $|2z + 3| > 4$; *c)* $\text{Im } z > 1$; *d)* $\text{Im } z = 1$;
   e) $0 \leqq \arg z \leqq \pi/4$ $(z \neq 0)$; *f)* $|z - 4| \geqq |z|$.

   Sol. *b), c)* son dominios.

2. ¿Qué conjunto del Ejercicio 1 no es ni abierto ni cerrado?

   Sol. *e).*

3. ¿Cuáles de los conjuntos del Ejercicio 1 son acotados?

   Sol. *a), g).*

4. Determinar en cada caso el cierre del conjunto:

   a) $-\pi < \arg z < \pi$ $(z \neq 0)$; *b)* $|\text{Re } z| < |z|$; *c)* $\text{Re}\left(\frac{1}{z}\right) \leqq \frac{1}{2}$;

   d) $\text{Re}(z^2) > 0$.

5. Sea S el abierto que consta de los puntos z tales que $|z| < 1$ o $|z - 2| < 1$. ¿Es abierto?

6. Probar que un conjunto S es abierto si y sólo si todos su puntos son interiores.

7. Hallar los puntos de acumulación de los siguientes conjuntos:

   a) $z_n = i^n (n = 1, 2, \ldots)$; *b)* $z_n = i^n/n (n = 1, 2, \ldots)$;
   c) $0 \leqq \arg z < \pi/2$ $(z \neq 0)$; *d)* $z_n = (-1)^n(1 + i)(n - 1)/(n = 1, 2, \ldots)$.

   Sol. *a)* Ninguno; *b)* 0; *d)* $\pm(1 + i)$.

8. Demostrar que si un conjunto contiene todos sus puntos de acumulación, es cerrado.

9. Probar que cualquier punto de un dominio es punto de acumulación de ese dominio.

10. Probar que un conjunto finito de puntos $z_1, z_2, \ldots, z_n$ no puede tener puntos de acumulación.