Trabajo n°4 : (a entregar por el 2o junio 2004)

En el espacio de Hilbert l^2, definimos los operadores de creación y de aniquilación a y a^* de la manera siguiente: esos dos operadores tienen un dominio comun

$$D = D(a) = D(a^*) = \left\{ x \in l^2 \text{t.q.} \sum_n n\, |x_n|^2 < \infty \right\}$$

y sus acciones sobre los vectores $x = (x_0, x_1, x_2, ...)$ son dadas por

$$\begin{aligned} ax &= (x_1, \sqrt{2}x_2, \sqrt{3}x_3, ...) \\ a^*x &= (0, x_0, \sqrt{2}x_1, \sqrt{3}x_2, ..) \end{aligned}$$

Introducimos los vectores $\varphi_n (n \in N)$, definidos por

$$(\varphi_n)_i = \delta_{ni}$$

Esos vectores forman una base ortonormal de l^2. El acción de a y a^* sobre esos vectores es

$$\begin{aligned} a\varphi_0 &= 0 \\ a\varphi_n &= \sqrt{n}\varphi_{n-1} \\ a^*\varphi_n &= \sqrt{n+1}\varphi_{n+1} \end{aligned}$$

Probar que:

- a y a^* son bien definidos sobre D
- a^* es el adjunto de a
- a es el adjunto de a^*
- $\sigma_p(a) = C$
- $\sigma_p(a^*) = \emptyset$
- En la 4° pregunta, ustedes ,en principio, construiron los vectores propios de a. Escribir esos vectores propios en terminos de los vectores φ_n definido arriba y normalisanlos a 1. Esos estados son los estados coherentes del oscilator armonico.