Trabajo n°1 : (a entregar por el 1o marzo 2004)

Resolver la ecuación de Laplace en coordenadas spheroidal (α, β, φ):

Las coordenadas spheroidal son relacionadas en las coordenadas cartesianas con las formulas siguientes:

$$\begin{aligned} x &= c \sinh \alpha \sin \beta \cos \varphi && (1) \\ y &= c \sinh \alpha \sin \beta \sin \varphi && (2) \\ z &= c \cosh \alpha \cos \beta && (3) \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} 0 &\leq \alpha < \infty \\ 0 &\leq \beta \leq \pi \\ -\pi &\leq \varphi \leq \pi \end{aligned}$$

Usando esas relaciones, podemos probar que el elemento de longitud ds es dado por

$$ds^2 = c^2(\sinh^2 \alpha + \sin^2 \beta)(d\alpha^2 + d\beta^2) + c^2 \sinh^2 \alpha \sin^2 \beta d\varphi^2 \qquad (4)$$

1. Expresar el laplaciano en esas coordenadas

2. Usando el metodo de separación de variables, resolver la ecuación de Laplace:
$$\Delta u(\alpha, \beta, \varphi) = 0 \qquad (5)$$
en el caso de condiciones fronteras independiente del angulo φ

3. Verificar que la ecuación en β admite solucion de tipo polinomios de Legendre

4. Verificar que haciendo la substitución $\beta = i\alpha$ en la ec. en la variable β, obtenemos la ec. en la variable α y usando este resultado, obtener la solución de la ec. en α en el caso de un problema interior, es decir cuando $0 \leq \alpha \leq \alpha_0$.

5. Escribir la solución la mas general y encontrar la solución unica correspondiente a la siguiente condición frontera:
$$u(\alpha_0, \beta, \varphi) = \cos \beta = f(\beta)$$

usando la serie de Legendre de la función $f(\beta)$,

$$\begin{aligned} f(\beta) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_l P_l(\cos\beta) \\ c_l &= (l+\frac{1}{2}) \int_0^{\pi} f(\beta) P_l(\cos\beta) \sin\beta d\beta \end{aligned}$$