

# Geometria diferencial I

Dr. David Delépine <sup>1</sup>

Instituto de Física de la Universidad de Guanajuato  
Loma del Bosque, N 103  
Col. Lomas del Campestre  
CP-37150 León, Gto

Enero 1, 2005

<sup>1</sup>email: [delepine@fisica.ugto.mx](mailto:delepine@fisica.ugto.mx); tel: ext. 8424



# Contenido

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Curvas</b>	<b>7</b>
2.1	Introducción . . . . .	7
2.2	Definición de una curva . . . . .	13
2.2.1	Preliminares analíticos. . . . .	14
2.2.2	Elaboración de una definición de curva. . . . .	19
2.3	Tangentes . . . . .	28
2.3.1	Puntos singulares . . . . .	32
2.4	Ecuación implícita de las curvas planas . . . . .	33
2.5	Envolvente de una familia de curvas planas . . . . .	39
2.6	Rectificación o longitud de un arco . . . . .	44
2.7	Representaciones normales . . . . .	49
2.7.1	Abscisa curvilínea. . . . .	50
2.7.2	Vector tangente. . . . .	53
2.8	Curvas planas (curvatura) . . . . .	54
2.8.1	Vector normal. . . . .	54
2.8.2	Curvatura. . . . .	54
2.8.3	Formulas de Frenet. . . . .	57
2.8.4	La evoluta. . . . .	57
2.8.5	Calculo práctico de la curvatura. . . . .	58
2.9	Curvas espaciales (triedro de Frenet) . . . . .	59
2.9.1	Torsión . . . . .	63
2.9.2	Proyecciones de la curva sobre los planos del triedro movil. . . . .	64
2.9.3	Calculo práctico de la curvatura y de la torsión. . . . .	66
<b>3</b>	<b>Superficie</b>	<b>69</b>
3.1	Definiciones . . . . .	69
3.2	Curvas sobre una superficie . . . . .	73
3.2.1	Coordenadas curvilíneas. . . . .	74
3.3	Planos tangentes . . . . .	75
3.3.1	Orientación. . . . .	78
3.4	Área . . . . .	80
3.5	Vector normal . . . . .	80

3.6	Primera forma fundamental . . . . .	81
3.7	Curvatura normal (triedro de Darboux, segunda forma fundamental) . . . . .	84
3.7.1	Triedro de Darboux-Ribaucour. . . . .	87
3.7.2	Segunda forma fundamental. . . . .	89
3.7.3	Curvas asintoticas. . . . .	92
3.8	Direcciones principales . . . . .	93
3.8.1	Puntos umbilicales . . . . .	93
3.8.2	Direcciones y curvaturas principales . . . . .	94
3.9	Clasificaciones de los puntos de una superficie . . . . .	97
3.9.1	La indicadora de Dupin. . . . .	98
3.10	Curvatura total . . . . .	101
3.10.1	La aplicación de Gauss . . . . .	102
3.11	Curvatura geodesica . . . . .	105
3.12	Superficies arregladas . . . . .	108
3.13	Superficies de revolución . . . . .	109
<b>4</b>	<b>Introducción a la geometría Riemaniana</b>	<b>113</b>
4.1	Tensor métrico y arcos riemanianos. . . . .	114
4.2	Campos de vectores tangentes . . . . .	117
4.3	Campos de tensores . . . . .	121
4.3.1	Productos tensoriales. . . . .	121
4.3.2	Campos de tensores. . . . .	123
4.4	Arcos trazados sobre un arco riemaniano . . . . .	123
4.5	Los simbolos de Christoffel . . . . .	125
4.6	Tensor de Riemann . . . . .	128
4.7	Campos de vectores a lo largo de un arco . . . . .	131
4.8	Derivada covariante . . . . .	132
4.9	Campos de vectores paralelos . . . . .	136
4.10	Curvatura geodesica . . . . .	141
4.11	Geódesicas . . . . .	143
<b>5</b>	<b>Ejercicios.</b>	<b>145</b>
<b>6</b>	<b>Bibliografía</b>	<b>159</b>

# Capítulo 1

## Introducción

Este curso de geometría diferencial es ante todo una introducción al tema de la geometría diferencial. Este curso, de primera intención, está dedicado a estudiantes en física en el cual tratamos de dar las nociones esenciales de geometría diferencial sin insistir sobre las demostraciones no-necesarias a la comprensión de los teoremas o definiciones. Ponemos mucho más énfasis sobre cómo aplicar esos conceptos en lugar de demostrarlos de manera formal. De este punto de vista, insistimos sobre los ejercicios presentados en el último capítulo. Esos ejercicios son muy importantes para dar una comprensión completa y intuitiva de los conceptos introducidos durante el curso.

Podríamos empezar el curso directamente hablando de variedades diferenciales de dimensión arbitraria. Pero con el fin de dar una comprensión intuitiva de las principales nociones de geometría diferencial, estudiamos esas nociones con ejemplos concretos fácilmente visualizables. Por eso, el curso se divide en 3 partes de tamaño prácticamente igual.

En el primer capítulo, estudiamos cómo definir las curvas (dimensión uno) en el plano afín o euclidiano. En la primera parte de este capítulo, recordamos las principales nociones de geometría que van a ser necesarias para entender este curso. Introducimos las nociones de curvatura, vector tangente, vector normal, coordenadas curvilíneas, envolvente de una familia de curvas, torsión, etc.... Ilustramos cada una de esas definiciones con varios ejemplos.

En el capítulo dos, generalizamos esas definiciones al caso de superficies e introducimos nociones suplementarias tales que primera forma fundamental, área de una superficie, segunda forma fundamental, ....

En el tercer capítulo, damos una introducción a la geometría riemanniana. Nos limitamos al caso de dos dimensiones pero este tratamiento es completamente general y puede generalizarse sin ningún problema al caso de 4- o de  $n$  dimensiones como usualmente es necesario cuando trabajamos en gravitación o cosmología.

Queremos atraer la atención de los lectores para no limitarse a estas notas. En la bibliografía, damos otras fuentes de información sobre este tema. Como lo mencionamos anteriormente, este curso es un curso introductorio a la ge-

ometría diferencial que tiene como objetivo principal de dar los conceptos para poder entender cualquier libro o referencia sobre este tema. No vamos a tener tiempo a dentro de este curso de aplicar esos conceptos a problemas de física concretos. Por eso, recomendamos para entender los conceptos citados e introducidos en estas notas y para ir mas alla de estas notas buscar otros puntos de vista presentes en la literatura sobre geometría diferencial.

Esas notas se inspiraron de los cursos de geometría (MATH1126) impartido por el Prof. Pascal Dupont y de geometría diferencial impartido por el Prof. Yves Felix de la Universidad Catolica Lovaina (Belgica).

Quiero particularmente dar mis agradecimientos al Dr. Jose Socorro que me ayudo a corregir y mejorar estas notas.

# Capítulo 2

## Curvas

### 2.1 Introducción

En el curso de álgebra, la noción de espacio vectorial sobre un cuerpo conmutativo fue introducida de manera extensiva. La estructura del espacio vectorial nos permite hacer de la geometría y también en el vocabulario del álgebra lineal se puede notar sus similitudes con el vocabulario de la geometría (usamos los términos de puntos, líneas, planos,...). Además, una vez que escogimos una base, tenemos varios métodos de cálculo del álgebra lineal como el cálculo matricial, etc. Pero la noción de espacio vectorial no es suficiente en geometría por una razón muy sencilla: en un espacio vectorial hay un vector privilegiado: el vector nulo. Al contrario, cuando hablamos del plano del espacio tridimensional de la geometría clásica de Euclides, no hay ningún punto privilegiado. Este problema puede ilustrarse también estudiando las aplicaciones que preserven la estructura de espacio vectorial. Las aplicaciones que preserven la estructura del espacio vectorial son las aplicaciones lineales. Pero cuando queremos hacer de la geometría una de las primeras aplicaciones lo más simple es una translación, pero esta aplicación no es lineal ya que no deja fijo el vector nulo. Por eso en geometría tenemos que definir una noción de espacio más general que la noción de espacio vectorial sobre un cuerpo conmutativo. Esta noción es la noción de **espacio afín**. La definición de un espacio afín sobre un cuerpo conmutativo fijo  $K$  se define como :

1. Un espacio afín sobre  $K$  ( o un  $K$  espacio afín) es un tripleté  $E = (\mathcal{E}, \vec{E}, \overrightarrow{---})$  donde

- (i)  $\mathcal{E}$  es un conjunto no vacío.
- (ii)  $\vec{E}$  es un espacio vectorial de dimensión finita o infinita sobre  $K$
- (iii)  $\overrightarrow{---}$  es una aplicación de  $\mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \vec{E}$

Además tienen que satisfacer los siguientes dos axiomas:

$$\forall p, q, r \in \mathcal{E}, \vec{pq} + \vec{qr} = \vec{pr} \text{ (relación de Chasles).}$$

$$\forall p \in \mathcal{E}, \forall v \in \vec{E}, \exists! q \in \mathcal{E} \text{ tal que } \vec{pq} = v$$

Un  $R$ -espacio afin se llama espacio afin real y un  $C$ -espacio afin es un espacio afin complejo. Los elementos de  $\mathcal{E}$  se llaman puntos, y los elementos de  $\vec{E}$  se llaman vectores. Vamos a decir que  $\vec{pq}$  es un vector de origen  $p$  y de extremidad  $q$ .

La noción de espacio afin nos permite estudiar un número de propiedades geométricas (por ejemplo, la noción de paralelismo, de paralelogramo). Pero, no es suficiente si queremos por ejemplo distinguir entre un rectángulo o un cuadrado. Eso nos lleva a introducir la noción de **espacio euclidiano**. Un espacio euclidiano es un espacio afin con un producto escalar definido sobre su dirección ( $\vec{E}$ ). En lo que sigue, repetiremos varias definiciones y nociones que por lo general fueron definidas o introducidas en un curso de álgebra lineal.

1. Sea  $V$  un  $R$ -espacio vectorial. El **producto escalar** sobre  $V$  es una aplicación bilineal, simétrica, positiva y definida. Eso significa que el producto escalar  $(-|-)$  es una aplicación definida como sigue:

$$(-|-) : V \times V \rightarrow R$$

y tiene que satisfacer las siguientes condiciones:

$$(i) \quad \forall u, v, w \in V, \forall \alpha, \beta \in R,$$

$$(\alpha u + \beta w | v) = \alpha(u | v) + \beta(w | v) \quad (2.1)$$

$$(v | \alpha u + \beta w) = \alpha(v | u) + \beta(v | w) \quad (2.2)$$

$$(ii) \quad \forall u, v \in V,$$

$$(u | v) = (v | u) \quad (2.3)$$

$$(iii) \quad \forall u \in V$$

$$(u | u) \geq 0 \quad (2.4)$$

$$(iv) \quad \forall u \in V,$$

$$(u | u) = 0 \Rightarrow u = 0 \quad (2.5)$$

1. Un espacio afin euclidiano es un doblete  $(E, (-|-))$  donde  $E$  es un espacio afin y  $(-|-)$  es un producto escalar sobre  $\vec{E}$ .

Una norma sobre un espacio vectorial euclidiano  $V$  es una aplicación:

$$\|-\| : V \rightarrow R$$

tal que

1.  $\forall u \in V, \|u\| = 0 \Rightarrow u = 0$



2.  $\forall u \in V, ((\forall \alpha \in R), \|\alpha u\| = \|u\| \cdot |\alpha|)$
3.  $\forall u, v \in V, \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

Un espacio vectorial con una definición de norma se llama **espacio vectorial normado**. En el caso de un espacio euclidiano, tenemos automáticamente una noción de norma derivada del producto escalar:

$$\|u\| = \sqrt{(u|u)}$$

Se puede verificar muy fácilmente que esta definición satisface los requisitos para ser una norma. Se puede probar que una norma se deriva de un producto escalar si satisface la identidad del paralelogramo, a saber,

$$\forall u, v \in V, \|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$$

1. **Desigualdad de Schwarz:** en un espacio vectorial euclidiano  $V$ ,  $\forall u, v \in V$ , tenemos

$$|(u|v)| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

**Ángulo entre dos vectores:** sean dos vectores  $u, v$  no-nulos en un espacio vectorial euclidiano. Usando la desigualdad de Schwarz, tenemos

$$-1 \leq \frac{(u|v)}{\|u\| \cdot \|v\|} \leq 1$$

Entonces, existe un y un único ángulo positivo  $\theta$  tal que

$$\cos \theta = \frac{(u|v)}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

Este ángulo único es llamado el ángulo entre los dos vectores  $u, v$ .

**Desigualdad de Minkowski:**  $\forall u, v \in V$ ,  $V$  un espacio vectorial euclidiano, tenemos

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

y además, se tiene la igualdad si y solamente si  $u$  y  $v$  son paralelos de misma dirección.

Una **distancia** sobre un conjunto  $E$  es una aplicación:

$$d : E^2 \rightarrow R$$

que satisface las siguientes condiciones:

- (i)  $\forall p, q \in E, d(p, q) = 0 \Rightarrow p = q$
- (ii)  $\forall p, q \in E, d(p, q) = d(q, p)$
- (iii)  $\forall p, q, s \in E, d(p, q) + d(q, s) \geq d(p, s)$

Un espacio con una definición de distancia es llamado un **espacio métrico**. Un espacio afín normado tiene automáticamente una noción de distancia derivada de la definición de la norma:

$$d(p, q) = \|\vec{pq}\|$$

1. Sea  $e = (e_1, \dots, e_n)$  una base de un espacio vectorial euclidiano  $V$ , sea  $u \in V$ . En lugar de caracterizar  $u$  por sus coordenadas en la base  $e$ ,

$${}_e u = \begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix}$$

tal que

$$u = \sum_{k=1}^n u^k e_k$$

es posible de caracterizar el vector  $u$  por los  $n$  reales:

$$u_k = (e_k | u)$$

que vamos a llamar las **coordenadas covariantes** de  $u$  en la base  $e$ . Para ilustrar la diferencia entre coordenadas y coordenadas covariantes, es suficiente tomar el caso que la base  $e$  no es normalizada. En tal caso, si cambiamos el  $i$ -ésimo vector de base:  $e'_i = k \cdot e_i$  ( $k \neq 0$ ), la coordenada correspondiente es dividida por  $k$  ( $u'^i = u^i/k$ ) y la coordenada covariante es multiplicada por  $k$  ( $u'_i = k \cdot u_i$ ). De manera general, tenemos

$$\begin{aligned} u_k &= (e_k | u) = (e_k | \sum_{j=1}^n u^j e_j) \\ &= \sum_{j=1}^n (e_k | e_j) u^j \\ &= \sum_{j=1}^n g_{kj} u^j \end{aligned}$$

Ahora, vamos a definir la **orientación de un espacio**. Primero vamos a recordar la definición de un **anillo ordenado**. Un anillo ordenado es un anillo  $(A, +)$  con una parte  $P$  de  $A$  tal que

1.  $\{P, \{0\}, -P\}$  son una partición de  $A$ .
2.  $\forall a, b \in A, a + b \in P$
3.  $\forall a, b \in A, ab \in P$

Podemos definir una relación de orden sobre  $A$  diciendo que

$$a \leq b \Leftrightarrow b - a \in P \cup \{0\}$$

Así por ejemplo,  $Z$  es un anillo ordenado (tomar  $P = N^* \equiv N \setminus \{0\}$ ). Por otro lado, no es posible de ordenar  $C$ .

Sea  $u = (u_1, u_2, \dots, u_p)$  una lista de vectores linealmente independientes y  $v = (v_1, \dots, v_p)$  una lista de mismo tamaño en el subespacio generado por la lista  $u$ . Como  $u$  es una base en este sub-espacio, podemos construir la siguiente matriz:

$$M = ({}_u v_1 \dots {}_u v_p)$$

donde  ${}_u v_1$  es la expresión del vector  $v_1$  en la base  $u$ . Vamos a decir que **los vectores  $v$  tiene la misma orientación que  $u$**

$$\det M \geq 0$$

Si  $v$  es también una familia libre, entonces  $v$  es también una base de este sub-espacio generado por  $u$  y  $M$  es la matriz de cambio de bases. En este caso,  $u$  tiene la misma orientación que  $v$  si y solamente si  $v$  tiene misma orientación que  $u$  si y solamente si  $\det M > 0$ . Si  $\det M < 0$ , vamos a decir que  $u$  y  $v$  tienen misma orientación. Si  $\det M < 0$ , vamos a decir que  $u$  y  $v$  tienen orientación opuesta. Por ejemplo, la base  $(e_2, e_3, e_1)$  tiene la misma orientación que la base  $(e_1, e_2, e_3)$ . Pero,  $(e_2, e_1, e_3)$  pertenece a la orientación opuesta. Así es fácil de convencerse que la relación "tener la misma orientación" entre familia libre es una equivalencia que tiene solamente dos clases de equivalencia.

Definición:

Sea  $V$  un espacio vectorial sobre un cuerpo ordenado  $K$  y  $\varphi$  un isomorfismo lineal de  $V$  en  $V$ . Vamos a decir que  $\varphi$  es directo si  $\det \varphi > 0$  y que es inverso si  $\det \varphi < 0$

Propuesta 1:

Sea  $V$  un espacio vectorial sobre un cuerpo ordenado  $K$ ,  $\varphi$  es un isomorfismo lineal de  $V$  en  $V$  y  $e$  una base de  $V$ . Las bases  $e$  y  $\varphi(e)$  son de misma orientación si  $\varphi$  es directo y son de orientación opuesta, si  $\varphi$  es inverso.

La elección de una de las dos clases de equivalencia por la relación tener la misma orientación entre bases es **una orientación del espacio vectorial**. Las bases que pertenecen a la orientación selecta son llamadas **bases directas** y las otras bases son llamadas **no-directas o "retrogradadas"**. Para cualquier entero  $n$ , la orientación canónica de  $K^n$  es la orientación en la cual la base canónica es directa y denotamos por  $A_+^n(K)$  el espacio  $A^n(K)$  con la orientación canónica.

Primero, hay que notar que la elección de una orientación sobre un espacio afín no induce una orientación sobre los sub-espacios. Ahora vamos a introducir una noción de orientación de un espacio vectorial mas cerca de la geometría diferencial:

Definición:

Sea  $e$  y  $g$  dos bases de un espacio vectorial real  $V$  de dimensión  $n$ , vamos a decir que  $g$  es homotopico a  $e$  si existe una aplicación continua

$$f : [0, 1] \rightarrow V^n : t \rightarrow (f_1(t), \dots, f_n(t))$$

tal que

1.  $\forall t \in [0, 1]$ ,  $f(t)$  es una base de  $V$ .
2.  $f(0) = e$  y  $f(1) = g$

Hay que ver esta aplicación  $f$  como una deformación continua transformando poco a poco  $e$  en  $g$ .

Propuesta 2: La relación de homotopia entre bases es una equivalencia.

**Demostración:**

- la relación es reflexivo: toda base  $e$  es homotopica a ella misma.
- Es simetrica: si  $g$  es homotopica a  $e$ , entonces,  $e$  es homotopica a  $g$ . De hecho, para demostrarlo, es suficiente de usar la aplicación  $f^*$  definida como

$$f^* : [0, 1] \rightarrow V^n : t \rightarrow f^*(t) = f(1 - t)$$

$f^*$  es una aplicación continua de  $[0, 1]$  tal que  $f^*(0) = g$ ,  $f^*(1) = e$ .

- Es transitiva: Si  $g$  es homotopica a  $e$  y si  $k$  es homotopica a  $g$ , entonces,  $k$  es homotopico a  $e$ . Por eso, si  $f(t)$  y  $h(t)$  son los dos funciones aue definen respectivamente la homotopia entre  $g$  e  $e$  y entre  $g$  y  $k$  ( $f(0) = e$ ,  $f(1) = g$ ,  $h(0) = g$ ,  $h(1) = k$ ), entonces,

$$F : [0, 1] \rightarrow V^n : t \rightarrow F(t) = \begin{cases} f(2t) & t \in [0, 1/2] \\ h(2t - 1) & t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

es una aplicaciòn continua tal que  $F(0) = e$  y  $F(1) = k$ .

Propuesta 3: Sea  $e$  una base de un espacio vectorial real  $V$  de dimensión  $n$  y sea  $i, j$  dos enteros tales que  $1 \leq i < j \leq n$ .

1. la base  $e^* = (e_1, \dots, e_{i-1}, e_j, e_{i+1}, \dots, e_{j-1}, e_i, e_{j+1}, \dots, e_n)$  es homotopica a  $e$ .
2. la base  $e^{**} = (e_1, \dots, e_{i-1}, -e_i, e_{i+1}, \dots, e_{j-1}, -e_j, e_{j+1}, \dots, e_n)$  es homotopica a  $e$ .

Demostración: (indicación: usar  $f(t) = (1 - t)e + te^*$ ).

Propuesta 4: Sea  $e$  una base de un espacio vectorial real  $V$  de dimensión  $n$ . Sea  $H$  un hiperplan suplementaria al sub-espacio engendrado por  $e_n$  y sea  $p$  la proyección sobre  $H$  paralelamente al sub-espacio generado por  $e_n$ . Con esas condiciones, tenemos que la base  $e^*$  definida como

$$e^* = (p(e_1), \dots, p(e_{n-1}), e_n)$$

es una base de  $V$ , homotópica a  $e$ .

Propuesta 5: Dos bases de un espacio vectorial real son de misma orientación si y solamente si son homotópicas.

De manera intuitiva, para transformar de manera continua una base  $e = (e_1, \dots, e_{n-1}, e_n)$  en una base  $e^* = (e_1, \dots, e_{n-1}, -e_n)$  de orientación opuesta, necesitamos a un momento que el último vector pasa por el hiperplano generado por los otros vectores de base. A este momento, la familia no es una base y entonces,  $e$  y  $e^*$  no son homotópicas.

Definición: una referencia cartesiana o sencillamente una referencia de un espacio afín es un par  $\mathcal{R} = (O, e)$  donde  $O$  es un punto de  $\mathcal{E}$  llamado el origen de la referencia y  $e = (e_1, \dots, e_m)$  es una base de  $\vec{E}$ .

Ejemplos:

- Sea  $K$  un cuerpo y  $n \in \mathbb{N}$ , la referencia canónica de  $A^n(K)$  es

$$\mathcal{R}_c^{(n)} = ((0, 0, \dots, 0); (1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1))$$

Definición: Si  $V$  es un espacio vectorial euclidiano orientado de dimensión  $n$ , el producto mixto de los vectores  $u_1, u_2, \dots, u_n \in V$  es el real

$$[u_1, u_2, \dots, u_n] = \det({}_e u_1 \quad {}_e u_2 \quad \dots \quad {}_e u_n)$$

donde  $e$  es una base ortonormal directa de  $V$ .

Sea  $u = (u_1 \dots u_k)$  una lista de vectores en un espacio vectorial euclidiano  $V$  de dimensión  $n$ . Vamos a llamar **el determinant de Gram** de esta lista el real que vamos a notar  $Gram(u)$  o  $Gram(u_1, \dots, u_k)$ :

$$Gram(u) \equiv \det \begin{pmatrix} (u_1|u_1) & \cdots & (u_1|u_k) \\ \vdots & & \vdots \\ (u_k|u_1) & \cdots & (u_k|u_k) \end{pmatrix}$$

Una consecuencia de esta definición es que si tenemos una lista de vectores  $(u_1, \dots, u_{n-1})$  en un espacio vectorial euclidiano orientado  $V$  de dimensión  $n$ :

$$Gram(u_1, \dots, u_{n-1}) = \|u_1 \wedge \dots \wedge u_{n-1}\|^2$$

## 2.2 Definición de una curva

Una de las características de la geometría es probablemente que las definiciones nunca son completamente satisfaciendo. El término de "curva" tiene varios sentidos dependiendo del contexto. Por ejemplo, en el caso de las conicas, las curvas correspondientes son definidas por el uso de una ecuación de este tipo:

$$P(x, y) = 0$$

donde  $P$  es un polinomio de grado 2. Un tal ecuación es dicha **ecuación implícita de la curva**. El estudio de las curvas a partir de una ecuación implícita es posible y es importante, en particular cuando la ecuación es polinomial: este método de estudio es privilegiado en el caso de la geometría algebraica. Pero en el caso de la geometría diferencial, la idea al inicio del estudio de las curvas es que una curva es una deformación de la línea de los reales o de un intervalo de la línea de los reales. En otro término, una curva va a ser una aplicación

$$f : I \rightarrow \mathcal{E}$$

donde  $I$  es un intervalo de  $R$ , acotado o no y  $\mathcal{E}$  es el espacio donde queremos trabajar. Es interesante de notar que eso se acerca de una otra intuición que nos viene de la cinemática, a saber que en tal caso, una curva es vista como la trayectoria de un punto material en movimiento. Este método de estudio de las curvas va también a aparecer en los términos usados en las definiciones de la geometría diferencial. Por eso, los argumentos de las funciones  $f$  son muchas veces notado con la letra  $t, t', t_0$  etc... y usualmente se llamo el tiempo.

### 2.2.1 Preliminares analíticos.

Como nuestro programa es de poner el cálculo diferencial y el cálculo integral al servicio de la geometría, es necesario de hacer un serie de recuerdos y precisar unos definiciones. Esas revisiones son el objeto de esta primera sección.

Lema 1:

Sea  $V$  y  $W$  dos espacios vectoriales reales,  $\|-\|_W$  una norma sobre  $W$  y  $f : V \rightarrow W$  un monomorfismo lineal. La aplicación

$$\|-\|_V : V \rightarrow R : v \rightarrow \|v\|_V \equiv \|f(v)\|_W$$

es una norma sobre  $V$ .

Tenemos que asegurarnos que los axiomas de la norma son satisfechos:

- Sea  $v \in V$  tal que  $\|v\|_V = 0$  es decir aue  $\|f(v)\|_W = 0$ , lo que significa que  $f(v) = 0$  en  $W$  y como  $f$  es un monomorfismo,  $v = 0$ .
- Sea  $v \in V$  y  $r \in R$ , entonces,  $\|rv\|_V = \|f(rv)\|_W = \|rf(v)\|_W = |r| \cdot \|f(v)\|_W = |r| \cdot \|v\|_V$
- Sea  $u, v \in V$  Entonces,  $\|u + v\|_V = \|f(u + v)\|_W = \|f(u) + f(v)\|_W \leq \|f(u)\|_W + \|f(v)\|_W = \|u\|_V + \|v\|_V$

Sea  $V$  un espacio vectorial real de dimensión finita  $n$ . La elección de una base  $e$  de este espacio nos da un isomorfismo de espacios vectoriales:

$$\alpha_E : V \rightarrow R^{n \times 1} : v \rightarrow_e v$$

Usando el lema anterior podemos definir una norma  $\|-\|_e$  sobre  $V$  diciendo para cualquier vector  $v$  que tenemos la siguiente relación:

$$\|v\|_e = \|_e v\|$$

donde  $\|-\|$  es la norma euclidiana definida sobre  $R^{n \times 1}$ . Usamos la biyección  $\alpha_E$  para transferir la norma de  $R^{n \times 1}$  sobre  $V$ . Pero a dos bases  $e$  y  $e'$  es asociado una constante  $k_{ee'}$  tal que

$$(\forall v \in V) \quad \|v\|_e \leq k_{ee'} \|v\|_{e'}$$

Sea,

$$S \equiv \{u \in R^{n \times 1} : \|u\| = 1\}$$

es la esfera unidad quien es cerrada y acotada. Consideramos la función:

$$v : R^{n \times 1} \rightarrow R : \begin{cases} 0 \rightarrow 0 \\ u \rightarrow \frac{\|e'(I)_e \cdot u\|}{\|u\|} \quad (u \neq 0) \end{cases}$$

Esta función es continua sobre  $S$  y entonces en virtud del teorema de los límites alcanzados, existe  $u_0$  y  $u_1 \in S$  tal que

$$v(u_0) \leq v(u) \leq v(u_1)$$

De hecho solo la desigualdad de la derecha nos interesa y es verdadera para cualquier  $u$  no-cero y no solamente para  $u \in S$  por que si  $u \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} v(u) &= \frac{\|u\| \cdot \left\| e'(I)_e \cdot \frac{u}{\|u\|} \right\|}{\|u\|} \\ &= \left\| e'(I)_e \cdot \frac{u}{\|u\|} \right\| \\ &= v\left(\frac{u}{\|u\|}\right) \\ &\leq v(u_1) \end{aligned}$$

por que  $\frac{u}{\|u\|} \in S$ .

Entonces si  $v \in V$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\|v\|_e}{\|v\|_{e'}} &= \frac{\|e v\|}{\|e' v\|} \\ &= \frac{\|e(I)_{e'} \cdot e' v\|}{\|e' v\|} \\ &= v_{(e' v)} \\ &\leq v(u_1) \end{aligned}$$

de tal manera que tenemos

$$\|v\|_e \leq v(u_1) \cdot \|v\|_{e'}$$

es suficiente de escoger  $k_{ee'} \equiv v(u_1)$ .

En general, los diferentes normas "importadas" no son idénticas, son solamente equivalente. Es decir que no determinan las mismas nociones métricas (por ejemplo, un triángulo puede ser equilátero o rectángulo en una sin serlo en una otra). Pero la equivalencia significa que determinan la misma topología, es decir por lo que nos interesa ahora, la misma noción de límite.

## Limites

Podemos ahora introducir la noción de limite de una función a valores en un espacio afín.

### Definición:

Sea  $E$  un espacio afín real,  $f$  una función de  $R$  en  $\mathcal{E}$ ,  $a \in R$  y  $P \in \mathcal{E}$ . Vamos a decir que  $P$  es límite de  $f$  en  $a$  si  $a$  es adherente al  $\text{dom } f$  y si  $\lim_a \left\| \overrightarrow{Pf(a)} \right\|_e = 0$  donde  $e$  es una base cualquiera de  $\overrightarrow{E}$  y donde

$$\left\| \overrightarrow{Pf} \right\|_e : \text{dom } f \rightarrow R : t \rightarrow \left\| \overrightarrow{Pf(t)} \right\|_e$$

De las consideraciones anteriores, la elección de la base que se usa en esta definición es indiferente. Es claro que el limite cuando existe es único. La notaremos  $\lim_a f$ .

El resultado siguiente es muy util:

### Proposición:

Sea  $E$  un espacio afín real,  $f$  una función de  $R \rightarrow \mathcal{E}$ ,  $a \in R$ ,  $P \in \mathcal{E}$  y  $\mathcal{R}$  una referencia de  $E$ . Notamos  $f^i$  las coordenadas de  $f$  en  $\mathcal{R}$  y  $p^i$  las coordenadas de  $P$ . Notamos también  $\mathcal{R}f$  la función compuesta:

$$\mathcal{R}(-) \circ f : \text{dom } f \rightarrow R^{n \times 1}$$

Las condiciones siguientes son equivalentes:

1.  $\lim_a f = P$
2.  $\lim_a (\mathcal{R}f) = \mathcal{R}P$
3. Para cada  $i$ ,  $\lim_a f^i = p^i$

### Demostración:

Los limites de  $R^{n \times 1}$  se calculan componente por componente, así la equivalencia entre 2 y 3 es clara.

Vamos probar ahora la equivalencia de 1 y 2. Sea  $e$  la base contenida en  $\mathcal{R}$ ; podemos explicitar la definición usando la base:

$$\begin{aligned} \lim_a f = P &\Leftrightarrow \lim_a \left\| \overrightarrow{Pf} \right\|_e = 0 \\ &\Leftrightarrow \lim_a \left\| \overrightarrow{ePf} \right\| = 0 \\ &\Leftrightarrow \lim_a \left\| \mathcal{R}f - \mathcal{R}P \right\| = 0 \\ &\Leftrightarrow \lim_a (\mathcal{R}f) = \mathcal{R}P \end{aligned}$$



### Derivación.

Sabemos que si  $I$  es un intervalo abierto de  $R$  y  $f : I \rightarrow R$  una función a valores reales, para cualquier  $t \in I$ ,

$$f'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

si este límite existe. Sea ahora  $E$  un espacio afín real: como definir la derivada de una función  $f : I \rightarrow \mathcal{E}$ ? Si  $t$  y  $\Delta t$  son elementos de  $I$ ,  $f(t)$  y  $f(t + \Delta t)$  son puntos de  $E$ : como hacer la diferencia y como dividir esta por el escalar  $\Delta t$ ? La solución es de reemplazar esta diferencia por el vector  $\overrightarrow{f(t)f(t + \Delta t)}$ , entonces, después de hacer eso, es posible de multiplicar este vector por  $1/\Delta t$ . Obtenemos así una función de  $R$  en  $\overrightarrow{E}$ :

$$\Delta t \rightarrow \frac{1}{\Delta t} \overrightarrow{f(t)f(t + \Delta t)},$$

como  $R$  y  $\overrightarrow{E}$  son equipados de una norma, hay un sentido de tomar el límite en 0 de esta función: si este límite existe, la tomamos como valor en  $t$  de la derivada de  $f$ :

$$f'(t) \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \overrightarrow{f(t)f(t + \Delta t)}$$

El precio a pagar con esta definición es que la derivada así definida toma sus valores no en  $\mathcal{E}$  pero en  $\overrightarrow{E}$ .

Es posible de iterar esta definición para obtener la derivada segunda? La respuesta es si por que el espacio vectorial  $\overrightarrow{E}$  puede ser visto como un espacio afín sobre el mismo. Recordamos que  $f : I \rightarrow \mathcal{E}$  es dicha de clase  $C^k$  si  $f, f', f'', \dots, f^{(k)}$  existen y son continuas.

### Producto escalar, producto mixto y producto vectorial de funciones.

Sea  $V$  un espacio vectorial euclidiano (orientado) de dimensión  $n$ ; los diversos productos definidos sobre  $V$  determinan productos analogos sobre las funciones a valores en  $V$ , construida punto por punto. La norma de tal función se definen igualmente punto por punto:

#### Definición

Sea  $V$  un espacio vectorial euclidiano (orientado) de dimensión  $n$ :

1. Sea  $f, g$  de  $R$  en  $V$ , el producto escalar de esas dos funciones es

$$(f|g) : \text{dom } f \cap \text{dom } g \rightarrow R : t \rightarrow (f|g)(t) \equiv (f(t)|g(t))$$

2. Sea  $f$  de  $R$  en  $V$ : la norma de esta función es

$$\|f\| : \text{dom } f \rightarrow R : t \rightarrow \|f\|(t) \equiv \|f(t)\|$$

3. Sea  $f_1, \dots, f_n$  de  $R$  en  $V$ , el producto mixto de esas  $n$  funciones es

$$\begin{aligned} [f_1 \dots f_n] &: \text{dom } f_1 \cap \dots \cap \text{dom } f_n \rightarrow R \\ t &\rightarrow [f_1 \dots f_n](t) \equiv [f_1(t) \dots f_n(t)] \end{aligned}$$

4. Sea  $f_1 \dots f_{n-1}$  de  $R$  en  $V$ , el producto vectorial de esas  $n - 1$  funciones es

$$\begin{aligned} f_1 \wedge \dots \wedge f_{n-1} &: \text{dom } f_1 \cap \dots \cap \text{dom } f_{n-1} \rightarrow R : \\ t &\rightarrow (f_1 \wedge \dots \wedge f_{n-1})(t) \equiv f_1(t) \wedge \dots \wedge f_{n-1}(t) \end{aligned}$$

Cuando dos funciones  $f$  y  $g$ , definidas sobre el mismo dominio, tienen un producto escalar nulo, vamos a decir que esas dos funciones son ortogonales y lo notamos  $f \perp g$ .

**Proposición:**

Sea  $V$  un espacio vectorial euclidiano (orientado) de dimensión  $n$  y  $I$  un intervalo de  $R$ , tenemos

1. Si  $f, g$  son derivables, entonces, el producto escalar  $(f|g)$  es derivable y igual a

$$(f|g)' = (f'|g) + (f|g')$$

2. Si  $f$  es derivable y no se anula, entonces, tenemos que  $\|f\|$  es derivable y

$$\|f\|' = \frac{(f|f')}{\|f\|}$$

3. Si  $f_1, \dots, f_n$  son derivables, entonces  $[f_1 \dots f_n]$  es derivable y igual a

$$[f_1 \dots f_n]' = \sum_{1 \leq j \leq n} [f_1 \dots f_j' \dots f_n]$$

4. Si  $f_1 \dots f_{n-1}$  son derivables, entonces,  $f_1 \wedge \dots \wedge f_{n-1}$  es derivable y tenemos

$$(f_1 \wedge \dots \wedge f_{n-1})' = \sum_{1 \leq j \leq n} f_1 \wedge \dots \wedge f_j' \wedge \dots \wedge f_{n-1}$$

**Consecuencias:**

- Sea  $V$  un espacio vectorial euclidiano,  $I$  un intervalo abierto de  $R$  y  $f : I \rightarrow V$  una función derivable. La función  $f$  y su derivada  $f'$  son ortogonales si y solamente si la norma de  $f$  es una función constante.
- Sea  $V$  un espacio vectorial euclidiano de dimensión  $n$ ,  $I$  un intervalo abierto de  $R$  y  $f_1, \dots, f_n : I \rightarrow V$  funciones derivables. Suponemos además que para cualquier  $t \in I$ ,  $(f_1(t), \dots, f_n(t))$  sea una base ortonormal y notamos  $M : I \rightarrow R^{n \times n}$  la función a valores matriciales tal que, para cualquier  $t$ , tenemos

$$(f_1(t), \dots, f_n(t))' = (f_1(t), \dots, f_n(t)) \cdot M(t)$$

En estas condiciones,  $\forall t \in I$ ,  $M(t)$  es una matriz antisimétrica.

### Primitivación

Sea  $E$  un espacio afín real y  $I$  un intervalo de  $R$ . Si  $f$  y  $\varphi: I \rightarrow \vec{E}$  son dos funciones tal que  $\varphi' = f$ , vamos a decir que  $\varphi$  es una primitiva de  $f$  y en este caso, para cualquier vector  $u \in \vec{E}$ ,

$$u + \varphi : I \rightarrow \vec{E} : t \rightarrow u + \varphi(t)$$

es todavía una primitiva de  $f$ . Pero al lado de las primitivas vectoriales,  $f$  admite primitivas puntuales y ellas son las funciones:

$$P + \varphi : I \rightarrow \mathcal{E} : t \rightarrow P + \varphi(t)$$

para  $P \in \mathcal{E}$ .

Si  $a, b \in I$  y si  $f$  es continua sobre  $[a, b]$ , el integral  $\int_a^b f$  es igual a

$$[\varphi]_a^b \equiv \varphi(b) - \varphi(a)$$

para cualquier primitiva vectorial  $\varphi$  de  $f$ , pero también tenemos

$$[F]_a^b \equiv \overrightarrow{F(a)F(b)}$$

para cualquier primitiva puntual  $F$  de  $f$ .

### 2.2.2 Elaboración de una definición de curva.

Tenemos una vaga idea que una curva en  $E$  debería ser una función:

$$f : I \rightarrow \mathcal{E}$$

donde  $I$  es un intervalo abierto no-vacío de  $R$ .

Un primer defecto de esta tentativa de definición de curva es que esta demasiado amplia. De hecho, según ella, cualquier parte de  $\mathcal{E}$  sería una curva. En efecto, la elección de una referencia en  $E$  le pone en biyección con  $R^n$  donde  $n$  es la dimensión de  $E$ . Y para cualquier parte  $P \subseteq R^n$ , hay una suryección:

$$f : R \rightarrow P$$

con  $R$  y  $R^n$  tienen mismo cardinal.

La intuición cinemática nos lleva a exigir que  $f$  tiene que ser continua: un punto móvil no se mueve por saltos pero si se mueve de una posición a otra, el punto móvil va a pasar por todas las posiciones intermedias. Si ponemos en nuestra definición esta exigencia de continuidad, podemos evitar los problemas que mencionamos arriba? La respuesta es no por que Peano dio al fin del XXésimo siglo un ejemplo de función continua  $f : [0, 1] \rightarrow R^2$  tal que su imagen sea un cuadrado. Pero el problema es que el cuadrado es de dimensión 2 y que para nosotros una curva tiene que ser de dimensión 1.

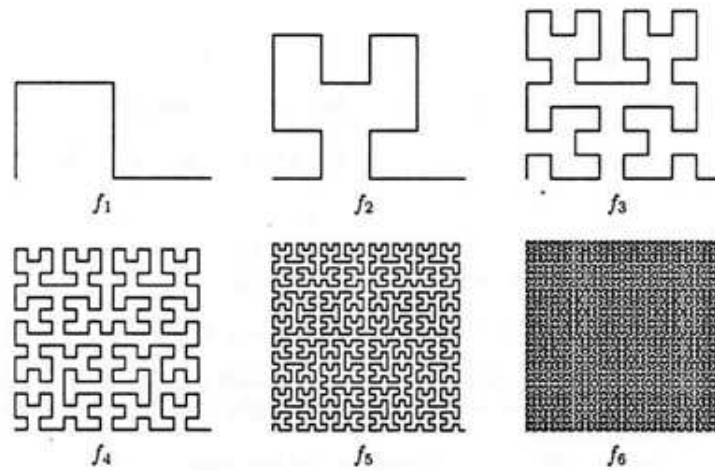


Figura 2.1: Ejemplo de Peano

Este ejemplo nos es dado por una función del siguiente tipo. Primero, definimos

$$f_1 : [0, 1] \rightarrow R^2 :$$

$$t \rightarrow f_1(t) \equiv \begin{cases} (0, 2t) & 0 \leq t \leq 1/4 \\ (2t - 1/2, 1/2) & 1/4 < t \leq 1/2 \\ (1/2, 3/2 - 2t) & 1/2 < t \leq 3/4 \\ (2t - 1, 0) & 3/4 < t \leq 1 \end{cases}$$

Definimos despues

$$f_2 : [0, 1] \rightarrow R^2 :$$

$$t \rightarrow f_2(t) \equiv \begin{cases} (4t, 0) & 0 \leq t \leq 1/16 \\ (1/4, 4t - 1/4) & 1/16 < t \leq 1/8 \\ \dots & \dots \end{cases}$$

Y asi de seguida, y finalmente definimos

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$$

Es posible de demostrar que la sucesión  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente sobre  $[0, 1]$ ; como cada  $f_n$  es continua,  $f$  es continua también. Además,  $f$  tiene como imagen  $[0, 1]^2$  pero no es inyectiva.

Podemos notar también que una aplicación constante:

$$f : I \rightarrow \mathcal{E}$$



Figura 2.2:

es continua pero su imagen es constituida de un solo punto. Este vez, es demasiado pequeño: su dimensión es cero.

La solución para eliminar esas dos patologías es de exigir que la función  $f$  no solamente sea continua pero inyectiva también. Pero esta exigencia de inyectividad es fuerte y adveces demasiado fuerte para numeras aplicaciones. Por ejemplo, esta condición no es satisfecha para la función:

$$f : R \rightarrow R^2 : t \rightarrow (\cos t, \sin t)$$

aunque tenemos muchas ganas de poder decir que esta función describe el círculo unidad en  $E^2(R)$ . Vamos a poder salvar esta definición de curva exigiendo solamente **inyectividad local**. Técnicamente, vamos a distinguir curvas y arcos, una curva se obtiene "pegando" arcos. Pero todavía subsiste un problema. Tenemos ganas de decir, por ejemplo, en  $A^n(R)$ :

$$\begin{aligned} f & : R \rightarrow R^n : t \rightarrow (t, 0, 0, \dots, 0) \\ g & : R \rightarrow R^n : t \rightarrow (t^3, 0, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

que esas dos funciones  $f$  y  $g$  representan el eje  $Ox_1$ . Pero esas dos funciones son diferentes. Del punto de vista cinemático, son dos movimientos diferentes pero dos trayectorias idénticas. La pregunta es de saber que cuenta: la trayectoria o la función? Por ejemplo, no tenemos ganas de decir que  $h$  y  $k : ]0, 1[ \rightarrow R^2$  descrita por la figura 2 son dos curvas idénticas aunque  $\text{im } h = \text{im } k$ .

La solución a este problema pasa por la noción de **cambio de parámetros**: la función

$$\varphi : R \rightarrow R : t \rightarrow t^3$$

es una biyección continua tal que  $g = f \circ \varphi$ , lo que nos conduce a decir que las curvas descritas por  $f$  y  $g$  son iguales pero no existe una biyección continua  $\psi : ]0, 1[ \rightarrow ]0, 1[$  tal que  $k = h \circ \psi$ .

Así vamos a identificar  $f$  y  $g$ , es decir que podemos sumergirlos en la misma clase de equivalencia por que existe entre ellas dos un cambio de parámetros.

Ahora, podemos pasar a nuestras definiciones. Sea  $E$  un espacio afín real y  $k \in N \cup \{\infty\}$ .

**Definición 1:**

Sea  $U, V$  dos abiertos de  $R$ . Una aplicación  $\varphi : U \rightarrow V$  es un cambio de parametros de clase  $C^k$  o un difeomorfismo de clase  $C^k$  si  $\varphi$  es biyectiva y si  $\varphi$  y  $\varphi^{-1}$  son de clase  $C^k$ .

**Definición 2:**

Una representación paramétrica de un arco de clase  $C^k$  en  $E$  es una aplicación  $f : I \rightarrow \mathcal{E}$ , inyectiva y de clase  $C^k$ , en cual  $I$  es un intervalo abierto no-vacio de  $R$ .

**Definición 3:**

Sea  $f : I \rightarrow \mathcal{E}$  y  $g : U \rightarrow \mathcal{E}$  dos representaciones paramétricas de arcos de clase  $C^k$ . Vamos a decir que  $f$  es equivalente a  $g$  en clase  $C^k$  si existe un difeomorfismo de clase  $C^k$ ,  $\varphi : I \rightarrow U$  tal que  $f = g \circ \varphi$ .

Esta relación de equivalencia en clase  $C^k$  es manifestamente reflejiva, simétrica y transitiva. Esas propiedades justifican el termino de equivalencia que usemos en la definición. Así, ahora vamos a poder considerar las clases determinadas por esta relación de equivalencia.

**Definición 4:**

Un arco de clase  $C^k$  en  $E$  es una clase de equivalencia de representaciones paramétricas de arcos de clase  $C^k$  en  $E$ , para esta noción de equivalencia en clase  $C^k$ .

**Definición 5:**

Una representación paramétrica de una curva de clase  $C^k$  en  $E$  es una aplicación  $f : U \rightarrow \mathcal{E}$  donde  $U$  es un abierto no-vacio de  $R$ , tal que para cada punto  $t \in U$ , existe un intervalo abierto  $I_t$  tal que  $t \in I_t \subseteq U$  y tal que  $f|_{I_t}$  sea una representación paramétrica de arco de clase  $C^k$ .

**Definición 6:**

Sea  $f : I \rightarrow \mathcal{E}$  y  $g : U \rightarrow \mathcal{E}$  dos representaciones paramétricas de curvas de clase  $C^k$ . Vamos a decir que  $f$  es equivalente a  $g$  en clase  $C^k$  si existe un difeomorfismo de clase  $C^k$ ,  $\varphi : I \rightarrow U$  tal que  $f = g \circ \varphi$ .

**Definición 7:**

Una curva de clase  $C^k$  en  $E$  es una clase de equivalencia de representaciones paramétricas de curvas de clase  $C^k$  en  $E$ , para esta relación de equivalencia.

Podemos resumir esas definiciones de la siguiente manera:

- la noción de representación paramétrica de un arco es la versión "local" de la noción "global" de representación paramétrica de una curva.
- una representación paramétrica puede ser percibida como la descripción del movimiento de un móvil puntual y presenta un carácter "cinemático" que desaparece completamente por su aspecto geométrico cuando hacemos el cociente usando las clases de equivalencia que nos conduce a las nociones de arcos y curvas.

**Definición 8:**

El soporte de una curva es la imagen de cualquier de sus representaciones paramétricas.

**Definición 9:**

Un punto  $P$  de la curva  $C$  representada por  $f : U \rightarrow \mathcal{E}$  es dicho  $n$ -uple si existe exactamente  $n$  valores  $t_1, \dots, t_n \in U$  tales que  $f(t_1) = \dots = f(t_n) = P$ . Si  $\{t \in U : f(t) = P\}$  es infinito,  $P$  es dicho de orden infinito.

Así, una curva es un arco si y solamente si todos sus puntos son sencillos.

Notas:

1. Toda representación paramétrica de clase  $C^k$  es también una representación paramétrica de clase  $C^{k'}$  con  $k' \leq k$ .
2. Una representación paramétrica de arco de clase  $C^k$  es también una representación paramétrica de curva de clase  $C^k$ , el inverso no es cierto.
3. Para que  $f : I \rightarrow \mathcal{E}$  sea inyectiva, una condición suficiente es que una de sus componentes, en una referencia escogida, sea inyectiva. Esta condición no es necesaria.
4. Como una representación paramétrica de arco es continua y definida sobre un intervalo, es decir una parte conexa de  $R$ , su imagen es también conexa. Entonces, todo soporte de arco es conexo, es decir de "una sola parte".
5. Si  $f$  y  $g$  son dos representaciones paramétricas de arcos equivalentes, el difeomorfismo  $\varphi$  tal que  $f = g \circ \varphi$  es único como  $f$  y  $g$  son inyectivas.
6. La mayoría de las nociones que vamos a introducir son nociones locales por las cuales la noción de arcos es suficiente. Necesitamos la noción de curvas cuando vamos a estudiar noción de naturaleza global (por ejemplo, la noción de longitud)

**Ejemplos**

1. Sea

$$f : R^* \rightarrow R^2 : t \rightarrow (t, \frac{1}{t})$$

es una representación paramétrica de curva de clase  $C^\infty$ . Su soporte es la hipérbola (figura (2.3))

$$H = \{(x, y) \in R^2 : xy = 1\}$$

Como este soporte no es conexo (hay un ramo en el primer cuadrante y un otro en el tercero), es imposible de representar este hipérbola como un arco.

2. la función  $f : R \rightarrow R^2 : t \rightarrow (0, t^2)$  no es una representación de curva. De hecho, en cualquier intervalo abierto  $I$  conteniendo 0, existe dos reales opuestos  $a$  y  $-a$ , entonces  $f_I$  no es inyectiva.

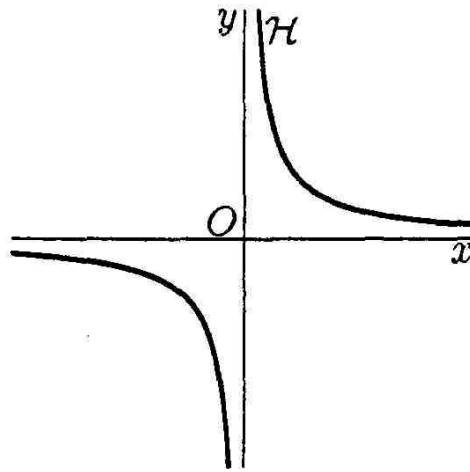


Figura 2.3:

3. Sea

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \rightarrow (\cos t, \sin t)$$

es una representación paramétrica de curva de clase  $C^\infty$ . Su soporte es el círculo unidad. Aquí también, es imposible de representar este círculo como un arco por que las exigencias de inyectividad y de definición sobre un intervalo abierto no pueden ser satisfechas simultáneamente. Notamos que todos los puntos de esta curva son de orden infinito.

4. Sea

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \rightarrow (t^2 + t, t^2 - t)$$

es una representación paramétrica de arco, de clase  $C^\infty$ . Pero ninguna de los dos componentes de  $f$  es inyectiva. La aplicación  $f$  representa la parábola de ecuación:  $x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y = 0$ .

5. Las funciones

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n : t \rightarrow (t, 0, 0, \dots, 0)$$

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n : t \rightarrow (t^3, 0, 0, \dots, 0)$$

son dos representaciones paramétricas de arcos de clase  $C^\infty$ . Como

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : t \rightarrow t^{1/3}$$

$$\varphi^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : t \rightarrow t^3$$

son dos biyecciones continuas tal que  $f = g \circ \varphi$ .  $f$  y  $g$  son equivalentes en clase  $C^0$  pero  $\varphi$  no es derivable al origen, entonces  $f$  y  $g$  no son equivalentes de clase  $C^1$ .



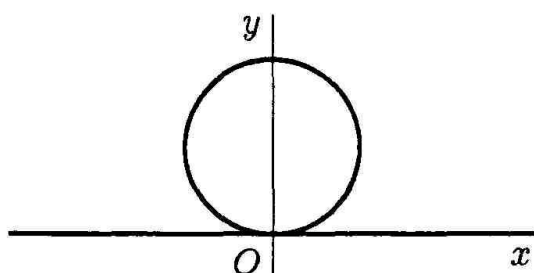


Figura 2.4:



Figura 2.5:

6. Las representaciones parametricas de curvas:

$$f : R \rightarrow R^2 : t \rightarrow \begin{cases} (t + \pi, 0) & t \leq -\pi \\ (\sin t, 1 + \cos t) & -\pi < t < \pi \\ (t - \pi, 0) & t \geq \pi \end{cases}$$

y

$$g : R \rightarrow R^2 : t \rightarrow \begin{cases} (t + \pi, 0) & t \leq -\pi \\ (-\sin t, 1 + \cos t) & -\pi < t < \pi \\ (t - \pi, 0) & t \geq \pi \end{cases}$$

tienen el mismo soporte: la reunión del eje  $Ox$  y del círculo de radio 1 centrado en  $(0, 1)$ . Pero del punto de vista cinemática, esas dos representaciones parametricas no describen el mismo movimiento: para  $f$  el soporte es recorrido de la izquierda hasta la derecha y para  $g$ , el soporte es recorrido en el sentido contrario. Esas dos representaciones parametricas de arcos no son equivalentes: no existe una biyección continua y de reciproca continua tal que podamos pasar de  $f$  a  $g$  e inversamente.

7. Si  $a, b \in R_+^*$

$$f : R \rightarrow R^3 : t \rightarrow \left( a \cos t, a \sin t, \frac{bt}{2\pi} \right)$$

$$g : R \rightarrow R^3 : t \rightarrow \left( a \cos t, -a \sin t, -\frac{bt}{2\pi} \right)$$

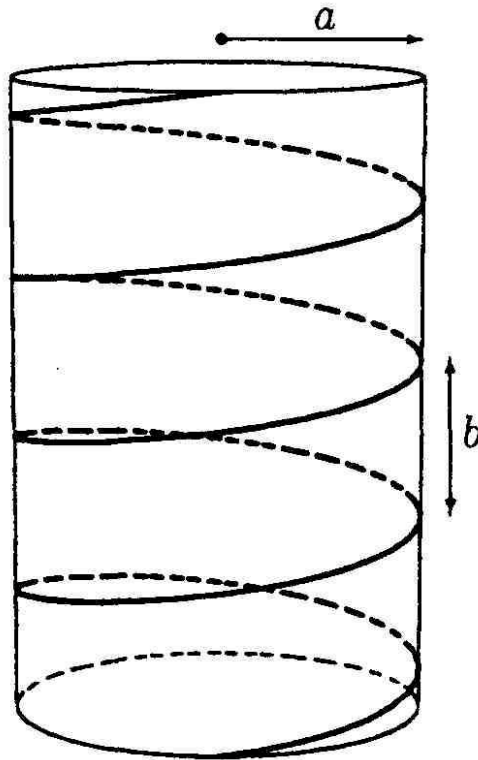


Figura 2.6: helice circular

son dos representaciones parametricas de arcos de clase  $C^\infty$  en  $R^3$ . Como  $f = g \circ \varphi$  si  $\varphi : R \rightarrow R : t \rightarrow -t$ , esas dos representaciones parametricas son equivalentes en clase  $C^\infty$ . El arco que representan llamado helice circular de radio  $a$  y de paso  $b$ .

### Curvas cerradas.

El circulo es el prototipo de la curva cerrada.

#### **Definición**

una curva de clase  $C^k$  en  $E$  es dicha cerrada si ella tiene una representación parametrica definida sobre  $R$  periodica.

### Orientación

La existencia , para la helice circular, de dos representaciones parametricas que se deducen una del otra por el difeomorfismo  $t \rightarrow -t$  parece indicar que los arcos

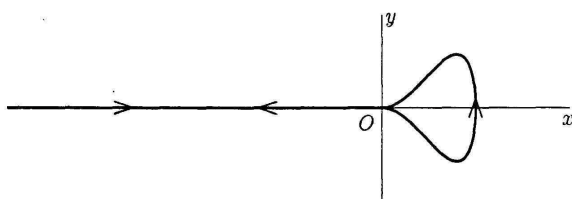


Figura 2.7:

pueden ser "recorrido" en los dos sentidos. Formalizando eso, vamos a llegar a la noción de orientación.

Un cambio de parametros (o difeomorfismo) entre representaciones parametricas de arco es una biyección continua de un intervalo en otro. Entonces, tiene que ser strictamente monotono, (strictamente creciente o strictamente decreciente). Los cambios de parametros entre una representación parametricas equivalentes se comparten entonces en dos clases. Si un cambio de parametros es ua función creciente, su reciproca lo es también y la compuesta de dos cambios de parametros crecientes es también creciente.

**Definición:**

Sea dos representaciones parametricas de arcos en  $E$ :  $f : I \rightarrow \mathcal{E}$  y  $g : U \rightarrow \mathcal{E}$ .  $f$  y  $g$  son dichas equivalentes y de misma orientación si existe un difeomorfismo  $\varphi$  creciente tal que  $f = g \circ \varphi$ . Un arco orientado es una clase de equivalencia por la relación "ser equivalente y de misma orientación".

Los dos representaciones parametricas  $f$  y  $g$  de la helice son entonces de orientación opuesta.

El caso de las curvas es mucho mas delicato. Consideramos primero la función

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \rightarrow \begin{cases} (\frac{1-t^2}{2}, t(1-t^2)^2) & -1 < t < 1 \\ (|t| - 1, 0) & t \leq -1, t \geq 1 \end{cases}$$

Es una representación parametrica de curva de clase  $C^1$  pero manifestamente,  $f$  no es inyectiva. Es interesante de representar graficamente esta curva y naturalmente, tenemos ganas de declarar tal curva no orientable.

El problema con esta representación parametrica es que admite dos restricciones que son representaciones parametricas de arcos equivalentes pero de orientaciones opuestas. Para que una curva sea orientable, necesitamos que este problema no se presenta.

**Definición:**

Vamos a decir que una representación de curva:  $f : U \rightarrow \mathcal{E}$  es orientable si cada vez que  $I, J \subseteq U$  son intervalos abiertos tales que  $f_I$  y  $f_J$  son representaciones parametricas de arcos equivalentes, tienen la misma orientación. Una curva es orientable si tiene una representación parametrica orientable.

Ejemplos:

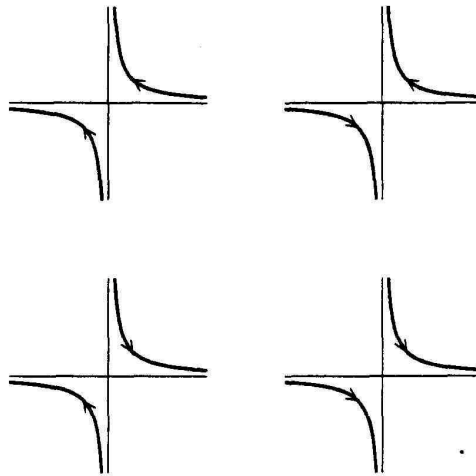


Figura 2.8:

1. la hipérbola dado en los ejemplos anteriores es constituida de dos arcos y cada uno puede ser orientado de dos maneras (ver figura (2.8)).
2. Observamos que

$$f : R^* \longrightarrow R^2 : t \longrightarrow \left( \frac{|t| + t}{2|t|} \ln|t|, \frac{|t| - t}{2|t|} \ln|t| \right)$$

que representa la reunión de los ejes  $Ox$  y  $Oy$  es orientable: hay un solo punto doble:  $f(-1) = f(1) = 0$ , dos restricciones de  $f$  a intervalos nunca van a ser equivalentes. Como en el caso del hipérbola, 4 orientaciones existen.

3. La situación es igual para

$$g : R \longrightarrow R^2 : t \longrightarrow (t^2 - 1, t(t^2 - 1)^2)$$

mismo si la curvatura admite, en el punto doble, dos tangentes confundidas.

## 2.3 Tangentes

Como la noción de curva, la noción de tangente puede ser estudiada de manera muy diversas. Euclides definió la tangente a un círculo como una línea (de su plano) encontrando el círculo en un punto único. Esta definición es perfectamente adaptada al círculo pero no puede generalizarse a otra curva. Un análisis más fino nos revela que de hecho, la tangente a un círculo no lo encuentra en un punto único pero en un punto doble, es decir en dos puntos confundidos.

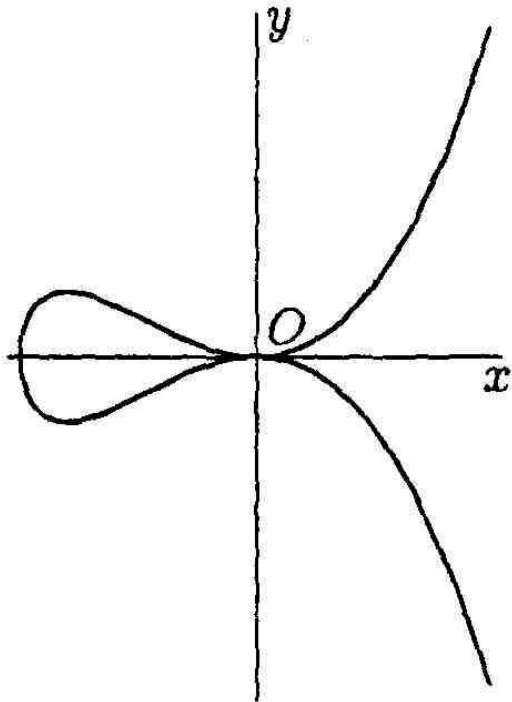


Figura 2.9:

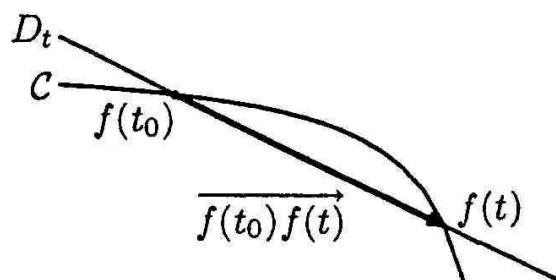


Figura 2.10: Definición de la tangente

Decir que la tangente a una curva en un punto la corta en dos puntos confondidos, es decir que una tangente tiene que ser la posición límite de una secante cuando los dos puntos de apoyo tienden uno al otro.

Entonces, sea en un espacio afín real  $E$ , un arco  $C$  representado por  $f : I \rightarrow \mathcal{E}$  de clase  $C^1$ . Sea  $t_0 \in I$ . Consideramos la secante a la curva, determinada por el punto  $f(t_0)$  y por un segundo punto  $f(t)$  donde  $t \neq t_0$ . Esta línea  $D_t$  es entonces determinada por el punto  $f(t_0)$  y por el vector director  $\overrightarrow{f(t_0)f(t)}$ . El punto  $f(t_0)$  no depende de  $t$  y entonces no va a cambiar si hacemos tender  $t$  a  $t_0$ . El vector director va tender a cero, lo que no nos conviene. La solución es de "normalizar" de una manera este vector director. Lo que vamos a usar es el vector director definido de la siguiente manera:

$$\frac{1}{t - t_0} \overrightarrow{f(t_0)f(t)}$$

que es paralelo a  $\overrightarrow{f(t_0)f(t)}$ . Entonces, este vez, tenemos

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{1}{t - t_0} \overrightarrow{f(t_0)f(t)} = f'(t_0)$$

quien es diferente del vector nula en general pero necesito tomar algunas precauciones.

**Definición**

Una representación paramétrica de curva,  $f : U \rightarrow \mathcal{E}$  de clase  $C^1$  es regular en  $t \in U$  si  $f'(t) \neq 0$ , y regular si  $f$  es regular en cada real de su dominio.

Eso se aplica en particular a los representaciones paramétricas de arcos de clase  $C^1$ . Observamos también que si  $f : U \rightarrow \mathcal{E}$  y  $g : V \rightarrow \mathcal{E}$  son dos representaciones paramétricas de curvas, de clase  $C^1$ , equivalentes en clase  $C^1$  via  $\varphi : U \rightarrow V$ , entonces,  $f$  es regular al punto  $t \in U$  si y solamente si  $g$  es regular al punto  $\varphi(t)$ . De hecho, usando la regla de derivación de las funciones compuestas:

$$f'(t) = (g \circ \varphi)'(t) = g'(\varphi(t))\varphi'(t)$$

y  $\varphi'(t) \neq 0$  como  $\varphi$  es un difeomorfismo de clase  $C^1$ . Entonces,

$$f'(t) \neq 0 \Leftrightarrow g'(\varphi(t)) \neq 0$$

Podemos entonces definir la siguiente noción:

**Definición**

Sea  $P$  un punto de un arco  $C$  de clase  $C^1$ ;  $C$  es regular en  $P$  (o  $P$  es un punto regular de  $C$ ) si  $f : I \rightarrow \mathcal{E}$ , una representación paramétrica de clase  $C^1$  de  $C$  y  $t \in I$  tal que  $f(t) = P$ ,  $f$  es regular en el punto  $t$ . Una curva de clase  $C^1$  es regular si tiene una representación paramétrica regular.

Esas definiciones que no dependen de las representaciones paramétricas son bien "geométricas".

Hay que notar que la última definición se aplica también a los arcos. Pero no hay sentido de hablar de una curva regular en un punto. En hecho, si  $P = f(t_1) = f(t_2)$ , es muy posible que  $f'(t_1)$  sea nula y  $f'(t_2)$  no lo es.

Regresamos a la construcción de la tangente. Tenemos ganas de definir la tangente al arco, en un punto regular como la línea  $D$  determinada por el punto  $f(t_0)$  y el vector director  $f'(t_0)$ . Si  $g$  es una representación paramétrica equivalente en clase  $C^1$ ,  $f = g \circ \varphi$  y la igualdad

$$f'(t_0) = g'(\varphi(t_0))\varphi'(t_0)$$

indica que los vectores  $f'(t_0)$  y  $g'(\varphi(t_0))$  son paralelos de tal manera que la línea determinada por el punto  $g(\varphi(t_0))$  y el vector director  $g'(\varphi(t_0))$  es nada más la misma línea  $D$ . Eso garantiza que la definición siguiente es bien "geométrica".

**Definición**

Sea  $f : I \rightarrow \mathcal{E}$ , una representación paramétrica de arco de clase  $C^1$ . La tangente a este arco en un punto regular  $f(t_0)$  es la derecha pasando por este punto y paralelo al vector  $f'(t_0)$ .

Si en lugar de considerar un arco, hablamos de curva de clase  $C^1$ , la única dificultad suplementaria es la pérdida de la inyectividad: puede existir diferentes valores de parámetros que corresponden al mismo punto de la curva. Es entonces posible que los diferentes arcos tienen diferentes tangentes o que uno tiene una tangente y que el otro no lo tiene.

Ejemplo: la "estrofoida derecha" es representada por la representación paramétrica siguiente (figura (2.11)):

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \rightarrow \left( at \frac{1-t^2}{1+t^2}, a \frac{1-t^2}{1+t^2} \right)$$

donde  $a$  es un real positivo no-cero. Manifiestamente,  $f(-1) = f(1) = (0, 0)$ : el origen es un punto doble. Así tenemos

$$f'(t) = \left( a \frac{1-4t^2-t^4}{(1+t^2)^2}, \frac{-4at}{(1+t^2)^2} \right)$$

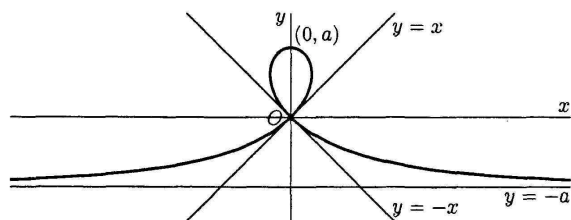


Figura 2.11: Estrofoida derecha

entonces

$$\begin{aligned} f'(1) &= (-a, -a) \\ f'(-1) &= (-a, a) \end{aligned}$$

La tangente al origen del arco representado por  $f_{R_-}$  (o respectivamente  $f_{R_+}$ ) a entonces por ecuación  $y = -x$  (resp.  $y = x$ ).

### 2.3.1 Puntos singulares

No hemos definido hasta ahora la tangente en un punto singular, pero no hemos dicho tampoco que en tal caso la tangente no existe.

Regresamos a la idea del inicio de esta sección, la tangente al arco  $C$  representado por  $f$ , al punto  $f(t_0)$  es la derecha pasando por este punto y que admite como vector director el limite de un multiple convenable de  $\overrightarrow{f(t_0)f(t)}$ . En un punto regular, metemos en frente de este vector el coeficiente  $1/(t - t_0)$  y el limite vale  $f'(t_0) \neq 0$ . En un punto singular, si tenemos

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{1}{t - t_0} \overrightarrow{f(t_0)f(t)} = 0$$

eso significa que el numerador tende a cero demasiado rapidamente comparado al denominador. Asi podemos probar de replazar eso por una potencia mas grande de  $(t - t_0)$ .

Haciendo la hipotesis que en  $t_0$  una de las derivadas de orden superior de  $f$  sea no-cero. Notamos  $p$  el orden de la primera derivada no-cero en  $t_0$  ( $p \geq 2$ , como suponemos que el punto es singular). Entonces, el polinomio de Taylor de orden  $p$  de  $f$  alrededor de  $t_0$  es

$$f(t) = f(t_0) + \frac{f^{(p)}(t_0)}{p!} (t - t_0)^p$$

y

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{1}{(t - t_0)^p} \overrightarrow{f(t_0)f(t)} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f^{(p)}(t_0)}{p!} \neq 0$$



Así vamos a definir la tangente a  $C$  en  $f(t_0)$  la derecha pasando por  $f(t_0)$  y admitiendo  $f^{(p)}(t_0)$  como vector director.

En el caso de las curvas planas, los puntos singulares pueden ser clasificados de la siguiente manera.

Sea  $C$  un arco plano, representado por  $f : I \rightarrow R^2$ . Suponemos que en  $t_0$ ,  $f$  admite dos derivados de orden superior linealmente independientes. Sea como en el caso anterior,  $p$  el orden de la primera derivada no-cero en  $t_0$ , sea  $q$  el orden de la derivada quien en  $t_0$  es linealmente independiente de  $f^{(p)}(t_0)$  ( $q > p \geq 2$ ). Así,  $\mathcal{R} \equiv (f(t_0); f^{(p)}(t_0), f^{(q)}(t_0))$  es una referencial. El polinomio de Taylor de orden  $q$  de  $f$  en  $t_0$  es

$$T_{t_0}^q f(t) = f(t_0) + \frac{f^{(p)}(t_0)}{p!}(t - t_0)^p + \frac{f^{(q)}(t_0)}{q!}(t - t_0)^q$$

El arco  $C^*$  representado por  $T_{t_0}^q f(t)$  es una buena aproximación de  $C$  al vecino de  $f(t_0)$ . Si notamos  $x'$  y  $y'$  los coordenadas en la referencia  $\mathcal{R}$ ,

$$C^* \equiv \begin{cases} x' = (t - t_0)^p/p! \\ y' = (t - t_0)^q/q! \end{cases}$$

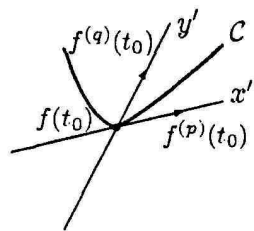
Usando esas ecuaciones, podemos ver el comportamiento de  $C^*$  y entonces de  $C$  en el vecino del punto  $f(t_0)$ : cuatro casos pueden presentarse en función de la paridad de  $p$  y  $q$ . De hecho, un exponente par significa que la coordenada correspondiente va a tomar solamente valores positivos y a contrario, un exponente impar significa que los dos signos van a aparecer:

1. si  $p$  es impar y  $q$  par: el punto singular es llamado "meplat"
2. si  $p$  y  $q$  son los dos impares, el punto singular es llamado inflección ( a notar que un punto regular puede ser también un punto de inflección)
3. si  $p$  es par y  $q$  impar, el punto singular es llamado un "retroceso de primer tipo"
4. si  $p$  y  $q$  son los dos pares, el punto singular es llamada "retroceso de segundo tipo". En este caso,  $T_{t_0}^q f(t)$  no es una representación de arco ni mismo de curva por que  $T_{t_0}^q f(t_0 + \Delta t) = T_{t_0}^q f(t - \Delta t)$  para cualquier  $\Delta t$ . Graficamente, eso corresponde a una curva que regresa sobre sus pasos.

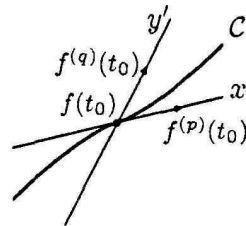
## 2.4 Ecuación implícita de las curvas planas

La experiencia nos aprende que las curvas en  $A^2(R)$  pueden ser descrita por ecuaciones implícitas de la forma siguiente:

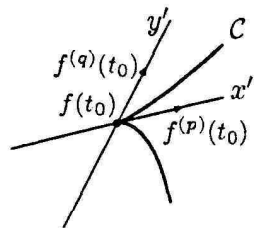
$$F(x, y) = 0$$



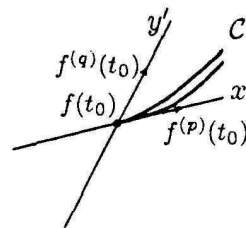
$$1. \begin{cases} p & \text{impar} \\ q & \text{par} \end{cases}$$



$$2. \begin{cases} p & \text{impar} \\ q & \text{impar} \end{cases}$$



$$3. \begin{cases} p & \text{par} \\ q & \text{impar} \end{cases}$$



$$4. \begin{cases} p & \text{par} \\ q & \text{par} \end{cases}$$

Figura 2.12: Puntos singulares

Pero cualquier ecuación  $F(x, y) = 0$  no necesariamente va a describir una curva. Por ejemplo,

$$(|x| - 1 + ||x| - 1|)^2 + (|y| - 1 + ||y| - 1|)^2 = 0$$

describo el cuadrado  $[-1, 1] \times [-1, 1] \subseteq \mathbb{R}^2$ , lo que es demasiado "grande" para poder ser considerado como una curva. Y a contrario, la ecuación

$$x^2 + y^2 = 0$$

tiene como solución el punto  $(0, 0)$ , lo que es demasiado "pequeño" para ser una curva.

El teorema de las funciones implícitas va a darnos las condiciones suficientes para que una ecuación implícita describa una curva. Sea  $F$  de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}$  y  $(a, b) \in \text{dom } F$  tal que  $F(a, b) = 0$ . Llamamos explicitación local de  $y$  en función de  $x$ , a partir de la relación  $F(x, y) = 0$ , en la vecindad del punto  $(a, b)$ , una función  $\varphi : I \rightarrow J$  donde  $I$  es un intervalo abierto conteniendo  $a$  y  $J$  un intervalo conteniendo  $b$  tal que

$$(\forall x \in I) (\forall y \in J) y = \varphi(x) \Leftrightarrow F(x, y) = 0 \quad (2.6)$$

Introduciendo el conjunto de los ceros de  $F$

$$Z(F) \equiv \{(x, y) \in \text{dom } F : F(x, y) = 0\}$$

y el gráfico de  $\varphi$

$$G_\varphi \equiv \{(x, y) \in I \times \mathbb{R} : y = \varphi(x)\}$$

La condición (2.6) se reescribo  $G_\varphi = Z(F) \cap (I \times J)$ . El teorema de las funciones implícita puede enunciarse:

**Teorema de las funciones implícitas:**

Sea  $F$  una función de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}$  y  $(a, b) \in \text{dom } F$ . Si

1.  $F(a, b) = 0$
2.  $F$  tiene en el vecindad de  $(a, b)$  derivadas parciales continuas.
3.  $\partial_2 F(a, b) \neq 0$

Entonces, existe una explicitación local de clase  $C^1$ ,  $\varphi : I \rightarrow J$  de  $y$  en función de  $x$ , a partir de la relación  $F(x, y) = 0$ , en la vecindad de  $(a, b)$ : además, para cualquier  $x \in I$ , tenemos

$$\varphi'(x) = -\frac{\partial_1 F(x, \varphi(x))}{\partial_2 F(x, \varphi(x))}$$

Cuando los hipótesis del teorema de las funciones implícitas son satisfechas, podemos representar en la vecindad de  $(a, b)$  el conjunto de los  $(x, y)$  tales que  $F(x, y) = 0$  por la función  $\Phi$

$$\Phi : I \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \rightarrow (t, \varphi(t))$$

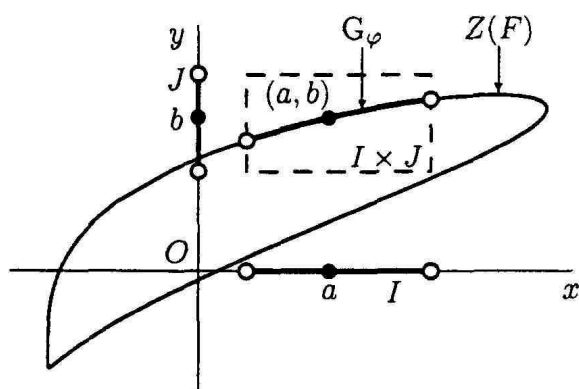


Figura 2.13: Teorema de las funciones implícitas.

Esta aplicación  $\Phi$  es inyectiva por que su primera componente lo es y derivable sobre  $I$ . Es entonces bien una representación paramétrica de arco. Entonces,

$$Z(F) \cap (I \times J)$$

es bien el soporte del arco.

Si, en  $(a, b)$ , las condiciones (1) y (2) del teorema de las funciones implícitas no son satisfechas, así que

$$\partial_1 F(a, b) \neq 0, \quad (2.7)$$

va a ser posible de explicitar  $x = \Psi(y)$ ,  $\Psi$  es una función derivable tal que

$$\Psi'(x) = -\frac{\partial_2 F(\Psi(y), y)}{\partial_1 F(\Psi(y), y)}$$

Y así obtenemos localmente una representación paramétrica del tipo

$$\Psi : J \rightarrow R^2 : t \rightarrow (\Psi(t), t)$$

Convenimos de llamar punto sencillo por  $F$  un punto que satisface (1) y (2) así que (3) y (2.7). Así demostramos que

Proposición: Sea  $F$  de  $R^2$  en  $R$ . Cualquier punto sencillo por  $F$  admite un vecindad  $V$  tal que

$$\{(x, y) \in \text{dom } F : F(x, y) = 0\} \cap V$$

sea el soporte de un arco.

Un punto  $(a, b) \in \text{dom } F$  tal que  $F(a, b) = \partial_1 F(a, b) = \partial_2 F(a, b) = 0$  es dicho punto múltiple de  $F$ . No vamos a estudiar los puntos múltiples. Vamos solamente mencionar que esos puntos múltiples son muchas veces, pero no siempre, relacionado a "particularidades" del conjunto de los ceros de  $F$ .

Si  $(a, b) \in \text{dom } F$  satisface (1),(2) y (3) , tenemos en la vecindad de este punto, un arco  $C$  de representación paramétrica  $\Phi : t \rightarrow (t, \varphi(t))$ . La tangente  $T$  al arco en  $(a, b)$  admite como vector director:

$$\begin{aligned}\Phi'(a) &= (1, \varphi'(a)) \\ &= \left(1, -\frac{\partial_1 F(a, b)}{\partial_2 F(a, b)}\right)\end{aligned}$$

O también

$$v = (\partial_2 F(a, b), -\partial_1 F(a, b))$$

que es proporcional a  $\Phi'(a)$ . Si son las condiciones (1),(2) y (2.7) que son satisfechas, tenemos la representación paramétrica  $\psi : t \rightarrow (\Psi(t), t)$  y

$$\begin{aligned}\psi'(b) &= (\Psi'(b), 1) \\ &= \left(-\frac{\partial_2 F(a, b)}{\partial_1 F(a, b)}, 1\right)\end{aligned}$$

La tangente  $T$  admite en los dos casos la siguiente ecuación paramétrica:

$$T = \begin{cases} x = a + \lambda \partial_2 F(a, b) \\ y = b - \lambda \partial_1 F(a, b) \end{cases}$$

y su ecuación cartesiana:

$$T \equiv \partial_1 F(a, b)(x - a) + \partial_2 F(a, b)(y - a) = 0$$

Ejemplos:

1. Consideramos la ecuación del elipse  $C \equiv (x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$  sobre la forma de  $F(x, y) = 0$  :

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \rightarrow (x/a)^2 + (y/b)^2 - 1$$

Entonces, tenemos

$$\begin{aligned}\partial_1 F(x, y) &= 2x/a^2 \\ \partial_2 F(x, y) &= 2y/b^2\end{aligned}$$

El sistema  $F(x, y) = \partial_1 F(x, y) = \partial_2 F(x, y) = 0$  es incompatible. Entonces, todos los puntos de  $C$  son sencillos por  $F$ . Si  $(x_0, y_0)$  es un punto de  $C$ , la tangente en este punto es igual a

$$\begin{aligned}T &\equiv \frac{2x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{2y_0}{b^2}(y - y_0) = 0 \\ &\equiv \frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y = 1\end{aligned}$$

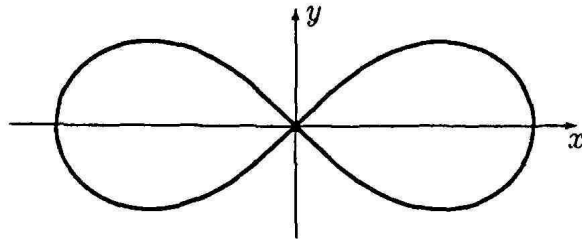


Figura 2.14: Lemniscate de Bernouilli

2. Consideramos ahora un hiperbola  $H \equiv (x/a)^2 - (y/b)^2 = 1 \equiv F(x, y) = 0$  si

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \rightarrow (x/a)^2 - (y/b)^2 - 1$$

Entonces, tenemos

$$\begin{aligned}\partial_1 F(x, y) &= 2x/a^2 \\ \partial_2 F(x, y) &= -2y/b^2\end{aligned}$$

De misma manera que el ejemplo anterior, el sistema  $F(x, y) = \partial_1 F(x, y) = \partial_2 F(x, y) = 0$  es incompatible. Entonces, todos los puntos de  $H$  son sencillos por  $F$ . Si  $(x_0, y_0)$  es un punto de  $H$ , la tangente en este punto es igual a

$$\begin{aligned}T &\equiv \frac{2x_0}{a^2}(x - x_0) - \frac{2y_0}{b^2}(y - y_0) = 0 \\ &\equiv \frac{x_0}{a^2}x - \frac{y_0}{b^2}y = 1\end{aligned}$$

3. Consideramos ahora la hiperbola degenerada en dos derechas secantes  $H \equiv (x/a)^2 - (y/b)^2 = 0 \equiv F(x, y) = 0$  si

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \rightarrow (x/a)^2 - (y/b)^2$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\partial_1 F(x, y) &= 2x/a^2 \\ \partial_2 F(x, y) &= -2y/b^2\end{aligned}$$

el sistema  $F(x, y) = \partial_1 F(x, y) = \partial_2 F(x, y) = 0$  tiene la solución  $(x, y) = (0, 0)$ : el origen quien es el punto de intersección de los dos derechas el cuales se descompone la hiperbola es un punto multiple por  $F$ . Los otros puntos de  $H$  son sencillos por  $F$ .

4. El "lemniscate" de Bernouilli es la curva de ecuación:

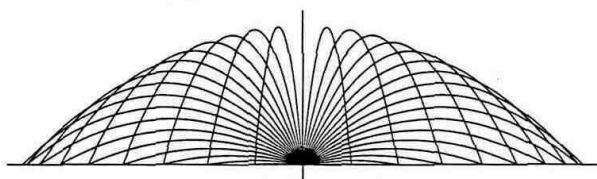


Figura 2.15: Envolvente de una familia de curvas

$$B \equiv (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

donde  $a$  es un real positivo no-cero. Sea

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \rightarrow (x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2)$$

entonces, tenemos

$$\partial_1 F(x, y) = 2x(2x^2 + 2y^2 - a^2)^2$$

$$\partial_2 F(x, y) = 2y(2x^2 + 2y^2 + a^2)^2$$

el sistema  $F(x, y) = \partial_1 F(x, y) = \partial_2 F(x, y) = 0$  tiene la solución  $(x, y) = (0, 0)$ : el origen es un punto múltiple por  $F$ , los otros puntos son puntos sencillos por  $F$ . Como en el caso de la hipérbola degenerada, la intuición sugiere que deberíamos necesitar dos arcos y no solamente uno para representar el "comportamiento" de la lemniscata alrededor del origen.

## 2.5 Envolvente de una familia de curvas planas

Vamos a empezar con un ejemplo.

Un arma de fuego puede disparar su proyectil en el plan vertical  $Oxz$  bajo diversos ángulos de disparo, pero siempre con la misma velocidad inicial. A cada posición del arma corresponde una trayectoria del proyectil que es una parábola si despreciamos la resistencia del aire. Todas esas parábolas ocupan un region del plan  $Oxz$ . Cual es esta region? O para decirlo de otra manera, cuales son los puntos que puede tocar el arma. Esta region tiene como frontera una curva que tiene la particularidad de ser tangente a cada de las parábolas, es decir que su tangente en cada punto es la misma que la tangente a la parábola. Eso nos conduce a la siguiente definición:

### **Definición:**

Sea  $U$  un abierto de  $\mathbb{R}$  y  $\mathcal{F} \equiv (C_u)_{u \in U}$  una familia de curvas planas regulares. Vamos a llamar envolvente de  $\mathcal{F}$  una curva plana regular  $A$  que admite una representación paramétrica  $f : V \rightarrow \mathbb{R}^2$  por la cual existe una función  $\omega : V \rightarrow U$  suryectiva, localmente inyectiva y continua tal que, para cualquier  $t \in V$ , tenemos

1.  $f(t)$  es un punto de  $C_{\omega(t)}$
2. En este punto,  $A$  y  $C_{\omega(t)}$  tienen la misma tangente.

Notas:

1. La función  $\omega$  indica a cual de las curvas de la familia  $\mathcal{F}$  la envolvente es tangente en el punto de parametro  $t$ . En función de eso, las hipótesis hechas sobre  $\omega$  aparecen naturales:
  - decir que  $\omega$  es suryectiva, es decir que  $A$  tiene un punto comun con cada curvas  $C_u$ .
  - decir que  $\omega$  es localmente inyectiva ( es decir que para cualquier  $t \in V$ , existe un intervalo abierto  $I$  que contiene  $t$  y contenido en  $V$  tal que  $f_I$  sea inyectiva), es decir que dos puntos vecinos distintos de  $A$  son sobre dos curvas  $C_u$  y  $C_{u'}$  con  $u \neq u'$ . Eso impede que una curva de  $\mathcal{F}$  (o un arco de tal curva) sea parte de la envolvente.
  - decir que  $\omega$  es continua, es decir que dos puntos vecinos de la envolvente tienen que estar sobre dos curvas  $C_u$  y  $C_{u'}$  con  $u$  "vecino" a  $u'$ .
2. En el caso lo mas sencillo, es posible de encontrar para  $A$  una representación paramétrica  $f : U \rightarrow R^2$  de dominio  $U$  y de tomar  $\omega = I_U$ . En muchos otros casos, eso no es posible

Proposición:

Sea  $C$  un arco plano regular, si  $\mathcal{F}$  es la familia de las tangentes a  $C$ , entonces  $C$  es la envolvente de  $\mathcal{F}$ .

La demostración de esta proposición es evidente.

Para hallar la envolvente de una familia de curvas, podemos usar el siguiente teorema:

Teorema (de las ecuaciones de Leibniz):

Sea  $F$  una función de  $R^3$  en  $R$  de clase  $C^1$ . Suponemos que para cualquier  $u$  en un intervalo abierto  $U$  de  $R$ , la ecuación  $F(x, y; u) = 0$  describe una curva regular  $C_u$ . Si la familia  $\mathcal{F} \equiv (C_u)_{u \in U}$  tiene una envolvente  $A$ , representado por  $f : V \rightarrow R^2$  de clase  $C^1$  con  $\omega : V \rightarrow U$  derivable, entonces, los puntos de  $A$  son soluciones del sistema

$$\begin{cases} F(x, y; u) = 0 \\ \partial_3 F(x, y; u) = 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

Esas dos ecuaciones son conocidas como ecuaciones de Leibniz. Ellas describen una parte  $P$  del plano que contiene  $A$ . Eliminar  $u$  entre los dos ecuaciones nos da una ecuación implícita de  $P$ . Resolver el sistema explícitamente en  $x$  y  $y$  en función de  $u$  nos da una representación paramétrica de  $P$ .



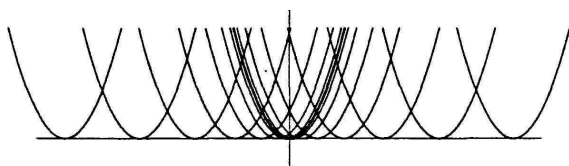


Figura 2.16:

Tenemos que repetir que las ecuaciones de Liebnitz da solamente una condición necesaria para que  $(x, y)$  pertenece a la envolvente. Dicho de otra manera, el conjunto descrito por las Ec.(2.8) contiene la envolvente pero puede contener también puntos "parasitos". Por ejemplo, si los puntos del arco representado por  $g : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  son todos puntos multiples de las curvas  $C_u$ , entonces, satisfacen también las Ec.(2.8). Puede pasar también que para un valor  $u_0 \in U$ , tenemos  $\partial_3 F(x, y; u) = 0$  en cada punto de  $C_{u_0}$ . En tal caso, la curva  $C_{u_0}$  es parte del conjunto de las soluciones de las ecuaciones de Liebnitz.

Ejemplos:

1. La ecuación  $x^2 - y^2 = 0$  describe una hipérbola  $H_0$  degenerada en dos rectas de ecuaciones  $y = x$  y  $y = -x$ . Notamos  $H_u$  el imagen de  $H_0$  por traslación de vector  $(u, 0)$  ( $u \in \mathbb{R}$ ). Es evidente que tal familia de curvas no admite una envolvente. Pero si aplicamos las ecuaciones de Liebnitz, tenemos

$$\begin{aligned} H_u &\equiv (x - u)^2 - y^2 \\ F(x, y; u) &= 0 = (x - u)^2 - y^2 \\ \partial_3 F(x, y; u) &= 0 = x - u \end{aligned}$$

Eliminando  $u$ , obtenemos como solución del sistema de ecuaciones el eje  $Ox$  de ecuación  $y = 0$ . Eso es debido al hecho que el origen es un punto múltiple de  $H_0$  y  $(u, 0)$  un punto múltiple de  $H_u$ : el eje  $Ox$  es el lugar de los puntos múltiples de las hipérbolas  $H_u$ .

2. Consideramos la parábola  $P_0$  de ecuación  $y = x^2$  así que sus imagen  $P_u$  por la traslación de vector  $(u^3, 0)$ . La parábola  $P_u$  es tangente, en el punto  $(u^3, 0)$  al eje  $Ox$ : este es entonces la envolvente de la familia  $(P_u)_{u \in \mathbb{R}}$ . Como  $P_u$  tiene como ecuación  $y = (x - u^3)^2$ , podemos hallar las ecuaciones de Liebnitz y obtenemos (ver figura (2.16)):

$$\begin{cases} y - (x - u^3)^2 = 0 \\ u^2(x - u^3)^2 = 0 \end{cases}$$

La eliminación de  $u$  nos da como solución  $y = 0$  y  $y = x^2$ , que describe la envolvente y la parábola  $P_0$ . La razón de eso es que la función  $u \rightarrow u^3$

presenta un punto estacionario en 0 lo que hace que , en la familia  $(P_u)$  , la parabola  $P_0$  es estacionaria.

3. Sea la familia  $(C_u)_{u \in \mathbb{R}}$  de curvas donde  $C_u \equiv y = u(x - u)^2$ . Cuando  $u \neq 0$ ,  $C_u$  es una parabola de eje vertical y de vertice  $(u, 0)$  y  $C_0 = Ox$ . La eliminaci3n de  $u$  entre los dos ecuaciones de Liebzniz :

$$\begin{cases} y - u(x - u)^2 = 0 \\ (x - 3u)(x - u) = 0 \end{cases}$$

nos da como soluci3n  $y = 0$  y  $y = \frac{4}{27}x^3$ . La primera soluci3n describo  $Ox$  que es una de las curvas de la familia. La pregunta es ahora de saber si esta soluci3n es una soluci3n parasita o no? La respuesta es que el eje  $Ox$  es parte de la envolvente como en cada de sus puntos, excepto en el origen, el eje  $Ox$  es tangente a una de las parabolos y que al origen, es tangente a el mismo.

4. Regresamos al ejemplo inicial. Escogimos una referencia ortonormal con origen la posici3n del arma y escogimos el eje  $Ox$  como eje horizontal. Notamos  $\varphi$  el 3ngulo entre  $Ox$  y la direcci3n de disparo y  $v$  la velocidad inicial del proyectil. El vector velocidad inicial de este proyectil es entonces  $(v \cos \varphi, v \sin \varphi)$  y el movimiento es descrito por las siguientes ecuaciones

$$\begin{cases} x = (v \cos \varphi)t \\ y = (v \sin \varphi)t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Obtenemos una ecuaci3n implcita de la trayectoria eliminando  $t$ :

$$y = \tan \varphi \cdot x - \frac{g}{2} \left( \frac{x}{v \cos \varphi} \right)^2$$

Poniendo  $u = \tan \varphi$ , esta ultima ecuaci3n puede reescribirse como

$$y = ux - \frac{g}{2v^2}(1 + u^2)x^2$$

Las ecuaciones de Liebzniz son entonces iguales a:

$$\begin{cases} y = ux - \frac{g}{2v^2}(1 + u^2)x^2 \\ x - \frac{gu}{v^2}x^2 = 0 \end{cases}$$

Lo que admiten como soluciones:

$$x = y = 0$$

o

$$\begin{cases} u = v^2/(gx) \\ y = \frac{v^2}{2g} - \frac{g}{2v^2}x^2 \end{cases}$$

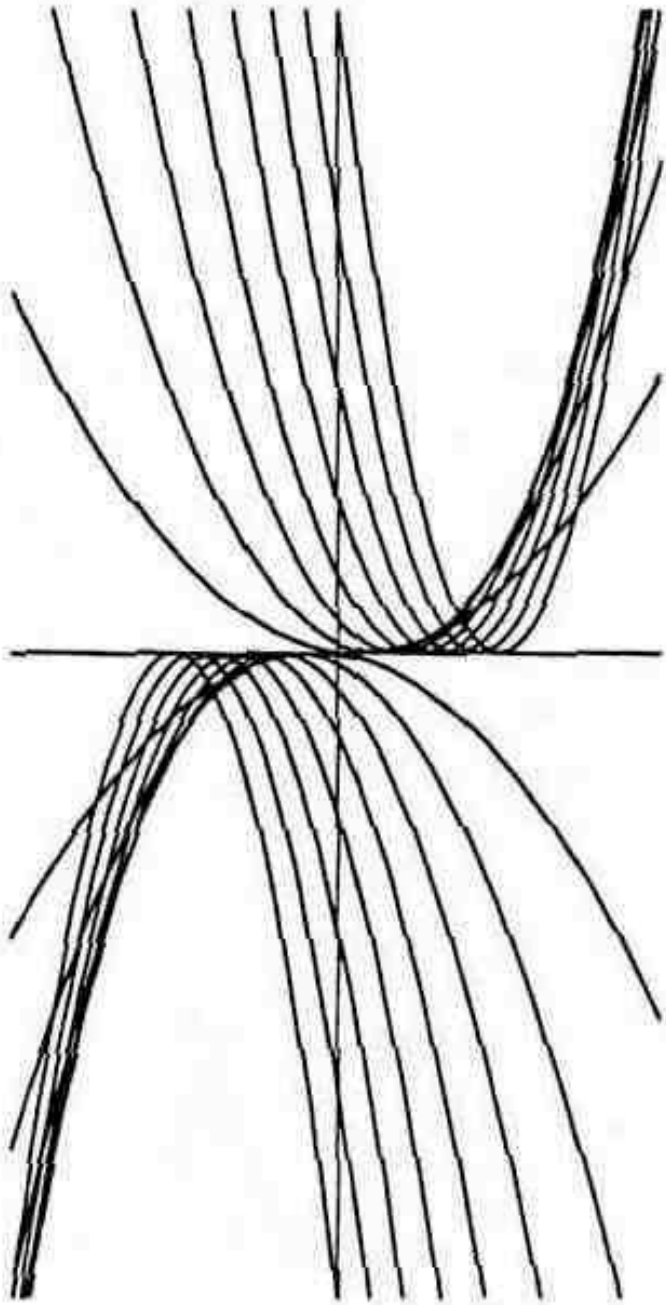


Figura 2.17:

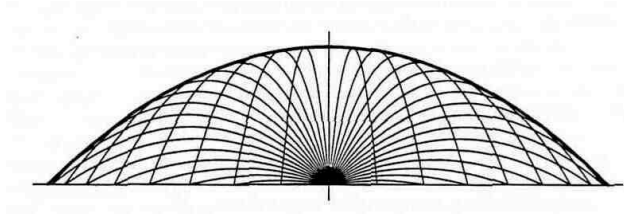


Figura 2.18: Parábola de seguridad

La primera solución está describiendo el origen: es un punto parásito. Y la envolvente tiene como ecuación

$$y = \frac{1}{2} \left( \frac{v^2}{g} - \frac{gx^2}{v^2} \right)$$

es una parábola de eje  $Oy$ . Los artilleros llaman la parábola de seguridad: el exterior de esta parábola es a cubierto de los disparos.

## 2.6 Rectificación o longitud de un arco

A partir de esta sección, vamos a estudiar las curvas del punto de vista métrico. Eso significa que nos plazamos en un espacio euclidiano  $E$ .

Antes de poder hallar la longitud de un arco, tenemos que primero definirlo. La idea es la siguiente: sabemos que la longitud de un segmento (abierto o cerrado) es:

$$L([AB]) = L(]AB[) = d(A, B)$$

y entonces sabemos lo que es la longitud de una línea rota  $[A_0A_1] \cup \dots \cup [A_{n-1}A_n]$ :

$$L([A_0A_1] \cup \dots \cup [A_{n-1}A_n]) = \sum_{k=1}^n d(A_{k-1}, A_k)$$

Por un arco, tenemos ganas de decir que su longitud es acercada por la longitud de una línea rota inscrita y que la aproximación es mejor si cada uno de los segmentos de esta línea rota es lo más corto posible. De allí, la idea de definir la longitud de un arco como el límite de la longitud de líneas rotas inscritas. Pero, el concepto de límite que necesitamos es muy pesado: necesitamos un límite portado sobre el número  $n$  de segmentos y sobre un número variable de puntos intermedios. Una mejor idea es de usar la desigualdad triangular y que si introducimos más puntos intermedios la longitud de la línea rota va a aumentar. Así podemos definir la longitud de un arco como el supremum de las longitudes de las líneas rotas inscritas.

Si un arco es representado por  $f : I \rightarrow \mathcal{E}$ , una línea rota inscrita es determinada por una lista  $(u_0, u_1, \dots, u_n)$  en  $I$  y decir que la línea rota  $[f(u_0)f(u_1)] \cup$

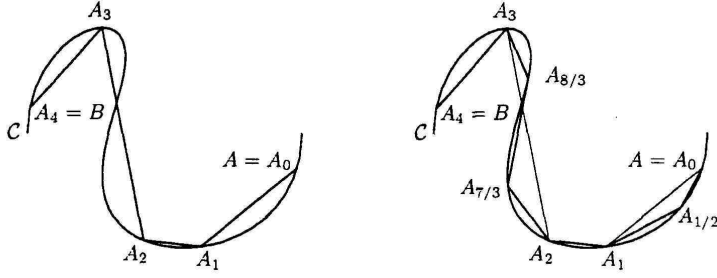


Figura 2.19: Longitud de un arco

$\dots \cup [f(u_{n-1})f(u_n)]$  no regresa por atras, es decir que esta lista es strictamente creciente:  $u_0 < u_1 < \dots < u_n$ . Vamos a notar  $I^{(<)}$  el conjunto de esas listas:

$$I^{(<)} \equiv \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{(u_0, u_1, \dots, u_n) \in I^{n+1} : u_0 < u_1 < \dots < u_n\}$$

Dado una lista  $u = (u_0, u_1, \dots, u_n) \in I^{(<)}$ , notamos  $l(f, u)$  la longitud de la linea rota inscrita  $[f(u_0)f(u_1)] \cup \dots \cup [f(u_{n-1})f(u_n)]$  que ella determina:

$$l(f, u) \equiv \sum_{k=1}^n d(f(u_{k-1}), f(u_k))$$

Vamos a notar

$$\mathcal{L}(f) \equiv \{l(f, u) : u \in I^{(<)}\} \subseteq \mathbb{R}_+$$

Lema:

Si  $f$  y  $g$  son dos representaciones paramtricas de arco equivalente, entonces  $\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(g)$ .

Asi podemos definir ahora la longitud de un arco:

**Definición:**

Sea  $C$  un arco en un espacio euclidiano  $E$ , representada por  $f : I \rightarrow \mathcal{E}$ ;  $C$  es dicha rectificable si  $\mathcal{L}(f)$  es mayorado. En tal caso, su supremum es llamado longitud de  $C$ :

$$L(C) \equiv \sup \mathcal{L}(f)$$

Ejemplos:

1. Vamos a estudiar la linea  $AB$ ,  $A$  y  $B$  son dos puntos de un espacio euclidiano. Podemos usar la representación paramtrica:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{E} : t \rightarrow A + t\overrightarrow{AB}$$

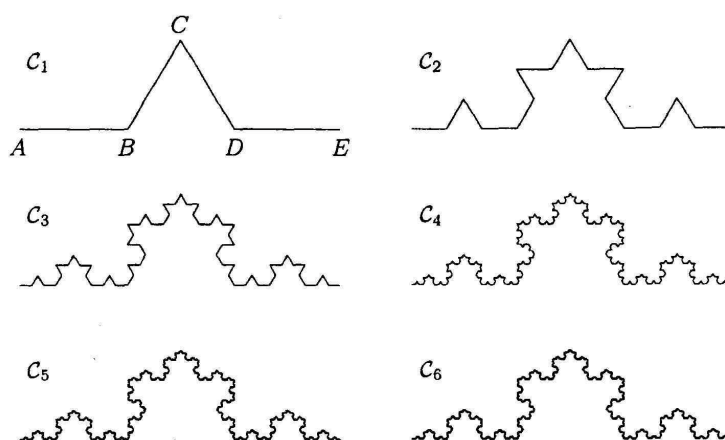


Figura 2.20: Curva de Koch

Por  $u = (u_0, u_1, \dots, u_n) \in R^{(<)}$ , tenemos

$$l(f, u) = (u_n - u_0)d(A, B)$$

Y entonces,

$$\mathcal{L}(f) = \{(u_n - u_0)d(A, B) : u_0 < u_n\} = R_+^*$$

Este conjunto no es mayorado y entonces la línea no es medible.

- Un ejemplo de arco acotado no rectificable nos es dado por la curva de Koch. Empezamos con un segmento  $]AE[$  y cambiamos el tercer central  $]BD[$  por los dos lados  $]BC[$  y  $]CD[$  de un triángulo equilátero de base  $]BD[$ . Sea  $C_1$  la línea rota  $]AB[ \cup ]BC[ \cup ]CD[ \cup ]DE[$ . Reiteramos esta operación, replazando cada de los 4 segmentos por una línea rota como hecho en la primera etapa. Eso nos da una línea rota  $C_2$  y de nuevo vamos a aplicar el mismo proceso a este curva y así de seguida. La curva de Koch  $C$  es el límite de la sucesión de curvas  $(C_0, C_1, \dots)$  así construida. Sea  $l$  la longitud de  $]AE[$ . Entonces, cada curva  $C_n$  es una línea rota inscrita en  $C$  y su longitud es  $(4/3)^n l$ . Como  $\sup_{n \in \mathbb{N}} (4/3)^n l = \infty$ ,  $C$  no es rectificable.
- Sea  $C$  una curva cerrada, descrita por la representación paramétrica  $f : I \rightarrow \mathcal{E}$ , periódica de período  $p$ . Si  $f_{]0,p[}$  es una representación paramétrica de arco, definimos la longitud de  $C$  como la longitud de este arco. Por ejemplo, el círculo centrado en el origen y de radio  $a$  en  $E^2(R)$  tiene como representación paramétrica:

$$f : R \rightarrow R^2 : t \rightarrow (a \cos t, a \sin t)$$

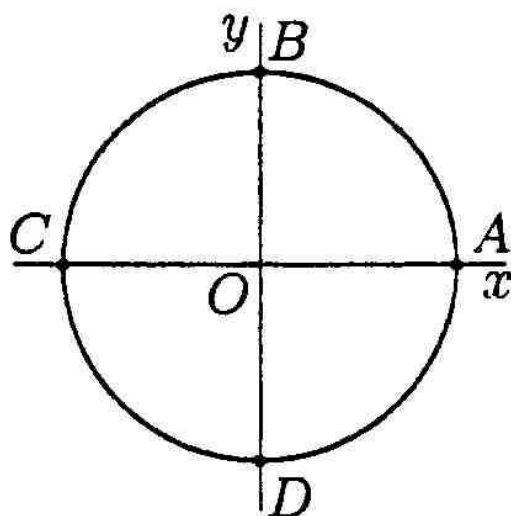


Figura 2.21:

Esta representación paramétrica es una representación paramétrica de curva pero no de arco. El periodo de  $f$  es  $2\pi$ . Sea entonces

$$g = f_{]0,2\pi[} : ]0,2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \rightarrow (a \cos t, a \sin t)$$

representando  $C_1$ . Por definición

$$L(C) \equiv L(C_1)$$

La noción de longitud de un arco satisface las propiedades usuales asociadas a la noción de distancia. Por ejemplo, tenemos la propiedad de aditividad de las longitudes de dos arcos. Es el contenido de la proposición siguiente:

Proposición:

Sea  $f : I \rightarrow \mathcal{E}$  una representación paramétrica de un arco  $C$  y sea  $P = f(r)$  un punto de este arco. Definimos  $I_1 \equiv \{t \in I : t < r\}$  y  $I_2 \equiv \{t \in I : t > r\}$  y  $f_k \equiv f_{I_k}$ . Sea  $C_k$  el arco representado por  $f_k$ . En esas condiciones,  $C$  es rectificable si y solamente si  $C_{1,2}$  son rectificables y en este caso tenemos

$$L(C) = L(C_1) + L(C_2)$$

Consecuencia: Si un arco  $C$  es rectificable, cualquier sub-arco  $C'$  de  $C$  es rectificable y  $L(C') \leq L(C)$ .

La proposición anterior nos sugiere como definir la longitud de una curva: es suficiente de decomponer esta curva en arcos disjuntos y de adicionar las longitudes.

Pero hasta ahora, tenemos una buena definición de la longitud de un arco pero no muy útil por un cálculo práctico. Es el objeto de la siguiente proposición de darnos un método práctico de cálculo de la longitud de un arco.

Proposición:

Sea  $C$  un arco de clase  $C^1$  en un espacio euclidiano  $E$ , representado por  $f : I \rightarrow \mathcal{E}$ . En esas condiciones,  $C$  es rectificable si y solamente si  $\int_I \|f'\|$  converge y en este caso,

$$L(C) = \int_I \|f'\|$$

Demostración:

Vamos a demostrar solamente la mitad de la proposición. Suponemos que  $\int_I \|f'\|$  converge. Consideramos una línea rota inscrita en  $C$ , determinada por la lista  $u = (u_0, u_1, \dots, u_n) \in I^{(<)}$ , tenemos

$$\begin{aligned} l(f, u) &= \sum_{k=1}^n \left\| \overrightarrow{f(u_{k-1})f(u_k)} \right\| \\ &= \sum_{k=1}^n \left\| \int_{u_{k-1}}^{u_k} f' \right\| \\ &\leq \sum_{k=1}^n \int_{u_{k-1}}^{u_k} \|f'\| \\ &= \int_{u_0}^{u_n} \|f'\| \\ &\leq \int_I \|f'\| \end{aligned}$$

Entonces,  $\mathcal{L}(f)$  es mayorado por  $\int_I \|f'\|$  y entonces  $C$  es rectificable y  $L(C) \leq \int_I \|f'\|$ .

Ejemplos:

1. Hallamos la longitud del círculo definido en el ejemplo anterior:

$$f'(t) = (-a \sin t, a \cos t)$$

y entonces,

$$\|f'(t)\| = a$$

y entonces,

$$L(C) = \int_0^{2\pi} a = 2\pi a$$



2. la "conchoespirale" es la curva espacial representada por

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 : t \rightarrow (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$$

Podemos verificar que esta curva es dibujada sobre la capa superior del cono de ecuación  $z^2 = x^2 + y^2$ . Hallamos la longitud del arco  $C$  de conchoespirale compresa entre el vertice del cono y el plano horizontal de lado 1.

$$f'(t) = (e^t(\cos t - \sin t), e^t(\cos t + \sin t), e^t)$$

y entonces,

$$\|f'(t)\| = \sqrt{3}e^t$$

Como  $f_3(t) < 1$  si y solamente si  $t < 0$ , el arco a medir es representado por la función  $g = f_{R_-^*}$  y tenemos

$$\begin{aligned} L(C) &= \int_{R_-^*} \|g'(t)\| \\ &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

3. La longitud de la lemniscate de Bernouilli:

$$f'(t) = \left( \frac{a \sin t (\sin^2 t - 3)}{(1 + \sin^2 t)^2}, \frac{a(1 - \sin^2 t)}{(1 + \sin^2 t)^2} \right)$$

Entonces,

$$\|f'(t)\| = \frac{a}{\sqrt{1 + \sin^2 t}}$$

Y la longitud de la lemniscate es igual a

$$\begin{aligned} L(B) &= a \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{1 + \sin^2 t}} \\ &= a \frac{\Gamma(\frac{1}{4})^2}{\sqrt{2\pi}} \\ &\simeq 5.24a \end{aligned}$$

## 2.7 Representaciones normales

Sea  $E$  un espacio euclidiano

### **Definición**

Una representación paramétrica de curva  $f : I \rightarrow \mathcal{E}$  es dicha normal si es de clase  $C^1$  y si  $\|f'\| = 1$

Usando la proposición anterior, eso significa que para cualquier  $a, b \in I$ , si  $C$  es el arco de curva representado por  $f$ , tenemos

$$L(C) = |b - a|$$

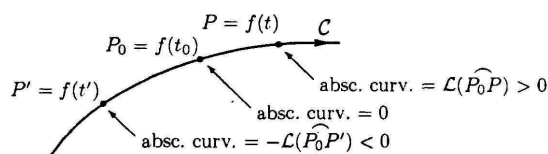


Figura 2.22: Abscisa curvilinea

Para decirlo de otra manera, una representación paramétrica es normal si y solamente el parámetro está mediando la longitud del arco, contada a partir de un punto de la curva, escogido como origen.

### 2.7.1 Abscisa curvilinea.

Sea  $C$  un arco orientado de clase  $C^1$ , representado por  $f : I \rightarrow \mathcal{E}$ , escogimos un punto  $P_0 = f(t_0)$  como origen y convenimos de llamar **abscisa curvilinea** de un punto  $P = f(t)$  la longitud  $L(P_0P)$  si  $t > t_0$  y el opuesto de esta longitud si  $t < t_0$ .

Ponemos

$$\sigma : I \rightarrow \mathbb{R} : t \rightarrow \sigma(t) \equiv \int_{t_0}^t \|f'\|$$

Así,  $\sigma(t)$  es la abscisa curvilinea del punto  $f(t)$ , que  $t$  sea inferior o superior a  $t_0$ . Entonces,  $\sigma' = \|f'\| \geq 0$  y  $\sigma$  es creciente. Además,  $\sigma'$  no es igual a cero sobre un intervalo, otramente  $f$  sería una función constante sobre este intervalo y no sería inyectiva. Entonces,  $\sigma$  es estrictamente creciente. Si  $J = \text{im } \sigma$ ,  $\sigma$  es una biyección de  $I$  sobre  $J$  de clase  $C^1$ . Su recíproca es continua pero no necesariamente derivable. Con estas condiciones, el compuesto

$$J \xrightarrow{\sigma^{-1}} I \xrightarrow{f} \mathcal{E}$$

es una representación paramétrica de  $C$  de clase  $C^0$  equivalente a  $f$  en clase  $C^0$  (y de misma orientación que  $f$ ). La notamos  $\bar{f} : J \rightarrow \mathcal{E}$ .

Si además,  $f$  es regular, como  $f'$  nunca se anula porque

$$(\sigma^{-1})' = \frac{1}{\sigma' \circ \sigma^{-1}} = \frac{1}{\|f'\|} \circ \sigma^{-1}$$

La recíproca  $\sigma^{-1}$  es también de clase  $C^1$ :  $\sigma$  es entonces un difeomorfismo de clase

$C^1$  y

$$\begin{aligned}
 \overline{f}' &= (f \circ \sigma^{-1})' \\
 &= (f' \circ \sigma^{-1}) \cdot (\sigma^{-1})' \\
 &= \frac{f' \circ \sigma^{-1}}{\sigma' \circ \sigma^{-1}} \\
 &= \frac{f' \circ \sigma^{-1}}{\|f'\| \circ \sigma^{-1}} \\
 &= \frac{f'}{\|f'\|} \circ \sigma^{-1}
 \end{aligned}$$

de tal manera que

$$\begin{aligned}
 \|\overline{f}'\| &= \left\| \frac{f'}{\|f'\|} \right\| \circ \sigma^{-1} \\
 &= \frac{\|f'\|}{\|f'\|} \circ \sigma^{-1} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

lo que nos demuestra que  $\overline{f}$  es una representación normal.

Ejemplos:

1. Sea  $k \in \mathbb{R}_+^*$ , la función

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \rightarrow (e^{kt} \cos t, e^{kt} \sin t)$$

es una representación paramétrica regular de la espiral logarítmica. Entonces,

$$f'(t) = (e^{kt}(k \cos t - \sin t), e^{kt}(k \sin t + \cos t))$$

y

$$\|f'(t)\| = \sqrt{k^2 + 1} e^{kt}$$

Entonces si tomamos el punto  $(1, 0) = f(0)$  por origen de las abscisas curvilineas:

$$\begin{aligned}
 \sigma(t) &= \int_0^t \|f'\| \\
 &= \sqrt{k^2 + 1} \int_0^t e^{kx} dx \\
 &= \frac{\sqrt{k^2 + 1}}{k} (e^{kt} - 1)
 \end{aligned}$$

Y entonces,

$$\sigma^{-1}(s) = \frac{1}{k} \ln \left( \frac{ks}{\sqrt{k^2 + 1}} + 1 \right)$$

Una representación paramétrica normal de la espirale logaritmica es igual a

$$\begin{aligned} \bar{f} &= f \circ \sigma^{-1} : R \rightarrow R^2 \\ s &\rightarrow \left( \left( \frac{ks}{\sqrt{k^2+1}} + 1 \right) \cos \left( \frac{1}{k} \ln \left( \frac{ks}{\sqrt{k^2+1}} + 1 \right) \right) \right. \\ &\quad \left. \left( \frac{ks}{\sqrt{k^2+1}} + 1 \right) \sin \left( \frac{1}{k} \ln \left( \frac{ks}{\sqrt{k^2+1}} + 1 \right) \right) \right) \end{aligned}$$

Pero podemos tomar otro punto de origen. En particular podemos tomar el punto  $0 = \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t)$  como origen de las abscisas curvilineas. En tal caso, obtenemos:

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \int_{-\infty}^t \|f'\| \\ &= \frac{\sqrt{k^2+1}}{k} e^{kt} \\ \Rightarrow \sigma^{-1}(s) &= \frac{1}{k} \ln \left( \frac{ks}{\sqrt{k^2+1}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{f} &= f \circ \sigma^{-1} : R \rightarrow R^2 \\ s &\rightarrow \left( \left( \frac{ks}{\sqrt{k^2+1}} \right) \cos \left( \frac{1}{k} \ln \left( \frac{ks}{\sqrt{k^2+1}} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. \left( \frac{ks}{\sqrt{k^2+1}} \right) \sin \left( \frac{1}{k} \ln \left( \frac{ks}{\sqrt{k^2+1}} \right) \right) \right) \end{aligned}$$

2. Consideramos en  $E^2(R)$  la parabola semi-cubica representada por (ver figura (2.23):

$$f : R \rightarrow R^2 : t \rightarrow \left( \frac{1}{2}t^2, \frac{1}{3}t^3 \right)$$

Esta función es una representación paramétrica de un arco de clase  $C^\infty$  pero no es regular porque  $f'(0) = 0$ . De hecho,  $f'(t) = (t, t^2)$  y  $\|f'\| = |t| \sqrt{1+t^2}$ . Asi si tomamos el punto  $O = f(0)$  como origen de las abscisas curvilinea, tenemos

$$\begin{aligned} \sigma : R \rightarrow R : t &\rightarrow \sigma(t) \\ \sigma(t) &\equiv \int_0^t \|f'\| \\ &= \frac{1}{3} \operatorname{sgn}(t) \left( (1+t^2)^{3/2} - 1 \right) \end{aligned}$$

La reciproca de esta biyección es

$$\begin{aligned} \sigma^{-1} : R \rightarrow R : s &\rightarrow \sigma^{-1}(s) \\ \sigma^{-1}(s) &\equiv \operatorname{sgn}(t) \sqrt{(1+3|s|)^{2/3} - 1} \end{aligned}$$

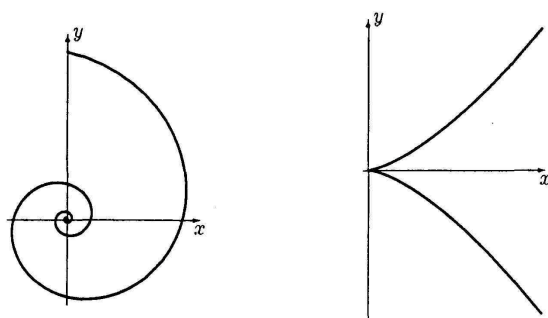


Figura 2.23: representaciones de primero la espiral logaritmica y de la parabola semi-cubica

que no es derivable en  $O$ . Composando  $f$  con  $\sigma^{-1}$ , obtenemos una representación paramétrica:

$$\begin{aligned} \bar{f} &= f \circ \sigma^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ s &\rightarrow \left( \frac{1}{2} \left( (1 + 3|s|)^{2/3} - 1 \right), \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{3} \operatorname{sgn}(s) \left( (1 + 3|s|)^{2/3} - 1 \right)^{3/2} \right) \end{aligned}$$

esta representación paramétrica es equivalente a  $f$  en clase  $C^0$  pero no es derivable en 0. Entonces,  $\bar{f}$  no es una representación paramétrica normal. Pero  $\bar{f}_{R_+^*} \circ f_{R_+^*}$  son representación paramétrica normal equivalente a  $f_{R_+^*, -}$  en clase  $C^\infty$ .

### 2.7.2 Vector tangente.

Sea  $C$  un arco orientado regular. Tiene una representación paramétrica normal  $\bar{f} : J \rightarrow \mathcal{E}$ . En cualquier punto  $\bar{f}(s)$ , la derivada  $\bar{f}'(s)$  es un vector unitario. Este vector es el vector tangente al arco en el punto considerado. Lo notamos  $\vec{t} \equiv \bar{f}'$ .

El vector tangente se calcula muy facilmente a partir de la representación paramétrica no necesariamente normal. Si  $f : I \rightarrow \mathcal{E}$  es una representación paramétrica regular de  $C$ , perteneciendo a la orientación escogida,  $\bar{f} = f \circ \sigma^{-1}$ , entonces tenemos

$$\vec{t} = \frac{f'}{\|f'\|} \circ \sigma^{-1}$$

Observemos que si cambiamos la orientación de  $C$ , el vector tangente es cambiado por su opuesto.

## 2.8 Curvas planas (curvatura)

Vamos ahora estudiar las curvas en el plan euclidiano orientado  $E_+^2(R)$ .

### 2.8.1 Vector normal.

Si  $P$  es un punto regular de un arco  $C$  en  $E_+^2(R)$ , este admite en  $P$  una tangente  $T$ . Existe una y una sola derecha ortogonal a  $T$  en  $P$ , lo llamamos **la normal a  $C$  en  $P$** . Si  $C$  es orientado, tiene un vector tangente en  $P$ ,  $\vec{t}$ , llamamos el vector norma a  $C$  en  $P$  el vector  $\vec{n}$  tal que  $(\vec{t}, \vec{n})$  sea una base ortonormal directa.

Notas:

Consideramos, sobre la curva  $C$  determinada por la ecuación implícita  $F(x, y) = 0$ , un punto  $P = (a, b)$  sencillo por  $F$ . Vimos anteriormente que  $v = (\partial_2 F(a, b), -\partial_1 F(a, b))$  es un vector director de la tangente a  $C$  en  $P$ . El vector  $u = (\partial_1 F(a, b), \partial_2 F(a, b))$  es ortogonal a  $v$ , entonces es el vector director de la normal  $N$  a  $C$  en  $P$ . Así tenemos,

$$\begin{aligned} N &\equiv \begin{cases} x = a + \lambda \partial_1 F(a, b) \\ y = b + \lambda \partial_2 F(a, b) \end{cases} \\ &\equiv \partial_2 F(a, b) \cdot (x - a) = \partial_1 F(a, b) \cdot (y - b) \end{aligned}$$

### 2.8.2 Curvatura.

El encanto de las curvas es de ser curva. Una curva no curva es nadamas que una recta.

La idea de inicio es que nuestra noción de curvatura tiene que traducir las variaciones de dirección de la curva. Para determinar la dirección de la curva, podemos usar el vector tangente si una orientación fue escogida. De hecho, el vector tangente es un vector unitario. Entonces, no cambia en norma, solamente va a cambiar en dirección y estudiar sus variaciones de dirección es igual a estudiar las variaciones del vector tangente. Pero en función de cual parametro podemos representarlo? Queremos una noción geometrica, no cinematica. En lugar de usar un parametro cualquiera, vamos a usar como parametro la abscisa curvilinea que es algo intrinseco a la curva. En fin, para medir las variaciones del vector tangente, lo mas natural que usar es usar la noción de derivada. Así vamos a definir la noción de curvatura de la siguiente manera:

**Definición**

Sea  $C$  un arco plano orientado con una representación parametrica normal  $\vec{f}: I \rightarrow R^2$  de clase  $C^2$ . Vamos a llamar el vector de curvatura de  $C$  la derivada del vector tangente  $\vec{t}$ , es decir el vector  $\vec{k} \equiv \vec{f}''$ .

Podemos notar que  $\vec{f}' \perp \vec{f}''$ , es decir que  $\vec{k} \perp \vec{t}$ . El vector curvatura es entonces normal a la curva. Además, usando un polinomio de Taylor de orden

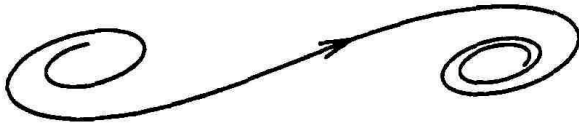


Figura 2.24:

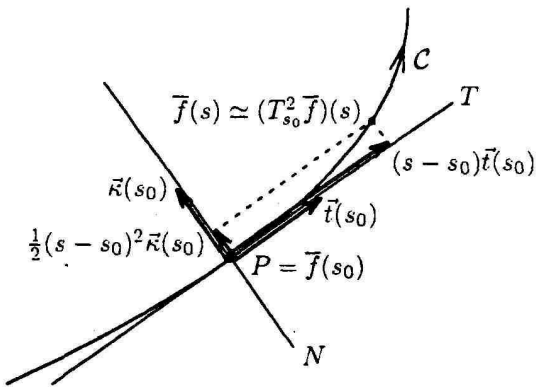


Figura 2.25:

2 en la vecindad del punto de parametro  $s_0$ , tenemos

$$\begin{aligned}\vec{f}(s) &\simeq \vec{f}(s_0) + (s - s_0)\vec{f}'(s_0) + \frac{1}{2}(s - s_0)^2\vec{f}''(s_0) \\ &= \vec{f}(s_0) + (s - s_0)\vec{t}(s_0) + \frac{1}{2}(s - s_0)^2\vec{k}(s_0)\end{aligned}$$

Si  $\vec{f}''(s_0) \neq 0$ , eso significa que para  $s$  vecino de  $s_0$ , la proyección de  $\overrightarrow{\vec{f}(s_0)\vec{f}(s)}$  sobre la normal es de mismo sentido que  $\vec{f}''(s_0)$ : entonces, el vector de curvatura es orientado en el sentido de la concavidad de la curva.

**Definición**

Sea  $C$  un arco orientado con una representación paramétrica normal  $\vec{f} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  de clase  $C^2$ . Vamos a llamar curvatura (escalar) de  $C$  la función  $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\vec{k} = \kappa \vec{n}$ . Si la curvatura no es cero, el radio de curvatura es el inverso de su valor absoluto, lo notaremos  $\rho$ .

Así, tenemos

- $\kappa = \pm \|\vec{k}\|$
- $\kappa = (\vec{k} | \vec{n}) = [\vec{t}, \vec{k}]$
- si  $\kappa \neq 0$ ,  $\rho = 1/|\kappa| = 1/\|\vec{k}\|$

Si  $\kappa \neq 0$ , el punto de la normal, del lado de la concavidad del arco, situado a una distancia  $\rho$  del punto corriente es llamado **centro de curvatura** y puede escribirse como

$$C \equiv P + \rho^2 \vec{k} = P + \frac{1}{\kappa} \vec{n}$$

El círculo centrado en este punto y de radio  $\rho$  es llamado **círculo osculator**, es el círculo que se acerca lo mejor a la curva en la vecindad del punto considerado.

Si cambiamos la orientación del arco, el vector tangente cambia de sentido y en consecuencia, también el vector normal. El vector de curvatura no es cambiado por que su sentido es el sentido de la concavidad de la curva. En consecuencia, la curvatura escalar cambia de signo pero ni el radio de curvatura, ni el centro de curvatura ni el círculo osculator son afectados.

El cambio de signo de la curvatura escalar corresponde a la observación que cuando recorremos un camino, lo que es una curva derecha para ir se transforma en curva izquierda por el regreso.

Es posible de dar una caracterización del centro de curvatura que puede ayudar a dar otra luz sobre la noción de curvatura.

**Proposición:**

el centro de curvatura de un arco regular de clase  $C^2$  es el límite del punto de intersección de dos normales vecinas.

No vamos a demostrar este teorema pero recomendamos al lector a tratar de hacerlo.



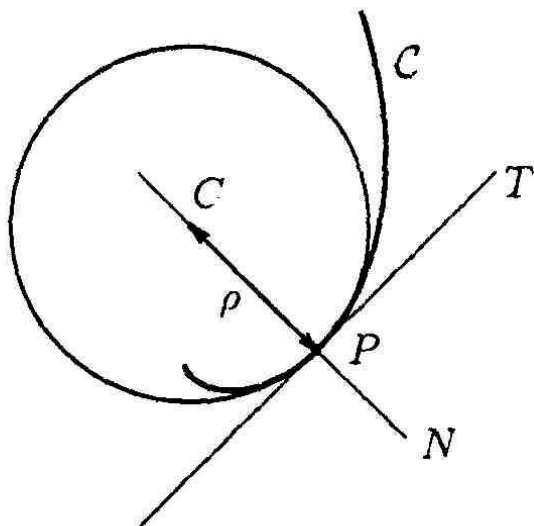


Figura 2.26:

### 2.8.3 Formulas de Frenet.

Por definición, tenemos  $\vec{t}' = \kappa \vec{n}$ , entonces, tenemos

$$\vec{n}' = -\kappa \vec{t}$$

En resumen, tenemos

$$\begin{cases} \vec{t}' = \kappa \vec{n} \\ \vec{n}' = -\kappa \vec{t} \end{cases}$$

Esas relaciones son las formulas de Serret-Frenet planas y puede reescribir como

$$(\vec{t}', \vec{n}') = (\vec{t}, \vec{n}) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -\kappa \\ \kappa & 0 \end{pmatrix}$$

### 2.8.4 La evoluta.

El lugar de los centros de curvatura de una curva  $C$  es una nueva curva  $D$  llamada la evoluta de  $C$ .  $C$  es también llamada la involuta de  $D$ .

Sea una representación paramétrica normal  $\vec{f} : I \rightarrow \mathcal{E}$  de  $C$ , la evoluta  $D$  de la curva  $C$  es entonces representada por

$$g \equiv \vec{f} + \frac{1}{\kappa} \vec{n} : I \rightarrow R^2$$

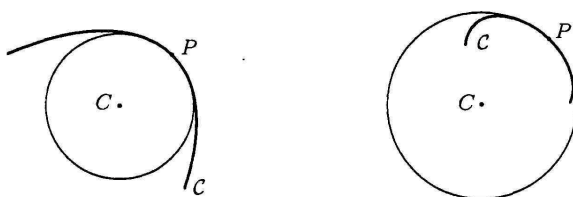


Figura 2.27:

y usando las relaciones de Serret-Frenet, tenemos

$$\vec{g}' = -\frac{\kappa'}{\kappa^2} \vec{n}$$

La evoluta tiene dos propiedades importantes:

Proposición:

Sea  $C$  un arco plano de clase  $C^2$  con curvatura no-cero, la evoluta de  $C$  es la envolvente de la familia de las normales a  $C$ .

Proposición:

Sea  $C$  un arco plano de clase  $C^3$  con curvatura monótona y no-cero. La longitud de un arco de la evoluta de  $C$  entre dos puntos es igual a el valor absoluto de la diferencia de los radios de curvatura de  $C$  en los puntos correspondiente.

La demostración la dejamos como ejercicio.

Usamos hasta ahora el hipótesis que la curvatura es monótona. De una manera, eso es la situación general. En un punto en la vecindad del cual la curvatura es creciente, el arco entra en su círculo osculador y si la curvatura es decreciente, el arco sale de su círculo osculador. En ausencia de información sobre la orientación, el arco pasa a través de su círculo osculador.

En un punto donde la curvatura pasa por un máximo, el arco queda localmente al exterior del círculo osculador. Y queda a dentro en un punto que es un mínimo de la curvatura. Los puntos en cuales la curvatura es extremal son llamados vértices del arco. A un vértice de la curva corresponde a un retroceso de su evoluta.

Teorema de los cuatro vértices:

Cualquier curva cerrada convexa de clase  $C^2$  tiene al menos 4 vértices.

### 2.8.5 Cálculo práctico de la curvatura.

Sea  $f$  una representación paramétrica de clase  $C^2$ . Entonces,  $\vec{f} = f \circ \sigma^{-1}$  es una representación paramétrica normal. Usando los resultados anteriores que

$$\vec{t} = \vec{f}' = \frac{f'}{\|f'\|} \circ \sigma^{-1}$$

En otro termino, tenemos

$$f' = (\vec{t} \circ \sigma) \|f'\|$$

entonces,

$$\begin{aligned} f'' &= (\vec{t}' \circ \sigma) \|f'\|^2 + (\vec{t} \circ \sigma) \|f'\|' \\ &= (\vec{n} \circ \sigma)(\kappa \circ \sigma) \|f'\|^2 + (\vec{t} \circ \sigma) \|f'\|' \end{aligned}$$

Y

$$\begin{aligned} [f', f''] &= [(\vec{t} \circ \sigma) \|f'\|, (\vec{n} \circ \sigma)(\kappa \circ \sigma) \|f'\|^2 + (\vec{t} \circ \sigma) \|f'\|'] \\ &= [(\vec{t} \circ \sigma) \|f'\|, (\vec{n} \circ \sigma)(\kappa \circ \sigma) \|f'\|^2] \\ &= \left( ([\vec{t}, \vec{n}] \cdot \kappa) \circ \sigma \right) \|f'\|^3 \\ &= (\kappa \circ \sigma) \|f'\|^3 \end{aligned}$$

Sea

$$\kappa = \frac{[f', f'']}{\|f'\|^3} \circ \sigma^{-1}$$

O si  $f_1$  y  $f_2$  son las coordenados de  $f$  en una referencia ortonormal directa,

$$\kappa = \frac{f_1' f_2'' - f_2' f_1''}{\|f'\|^3} \circ \sigma^{-1}$$

## 2.9 Curvas espaciales (triedro de Frenet)

Esta sección va a ser dedicada a las curvas espaciales es decir las curvas en el espacio euclidiano tridimensional orientado  $E_+^3(\mathbb{R})$ .

El vector curvatura de tal curva se defino de manera analago al caso de curvas planas:

### Definición

Sea  $C$  un arco espacial, con  $\vec{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  como representación parametrica normal de clase  $C^2$ . Llamamos vector de curvatura de  $C$  la derivada del vector tangente  $\vec{t}$ , es decir el vector  $\vec{k} = \vec{f}'$ .

Notamos que si cambiamos la orientación,  $\vec{t}$  cambio de signo y  $s$  cambio de signo. Entonces,  $\vec{k}$  queda igual. Pero, contrariamente al caso de las curvas planas, no podemos definir el vector normal exigiendo que  $(\vec{t}, \vec{n})$  sea una base ortonormal directa. De hecho,  $\vec{k}$  es un vector ortogonal a  $\vec{t}$  como este

es de norma constante. Además, en la vecindad del punto de abscisa curvilínea  $s_0$ , tenemos

$$\begin{aligned}\bar{f}(s) &\simeq \bar{f}(s_0) + (s - s_0) \bar{f}'(s_0) + \frac{1}{2}(s - s_0)^2 \bar{f}''(s_0) \\ &\simeq \bar{f}(s_0) + (s - s_0) \bar{t}(s_0) + \frac{1}{2}(s - s_0)^2 \bar{k}(s_0)\end{aligned}$$

Suponemos que  $\bar{k}(s_0) \neq 0$ , entonces, al orden 2,  $\bar{f}(s)$  está en el plano determinado por el punto  $\bar{f}(s_0)$  y los dos vectores directores  $\bar{t}(s_0)$  y  $\bar{k}(s_0)$ . Este plano es llamado **plano osculator a  $C$  en  $\bar{f}(s_0)$**  y es un plan que localmente "contiene" lo mas la curva.

Si  $\bar{k} \neq 0$ , de todos los vectores unitarios ortogonales a  $\bar{t}$ , es natural de escoger como **vector normal** el vector  $\bar{n} = \bar{k} / \|\bar{k}\|$ . Si definimos  $\kappa = \|\bar{k}\|$  que es la **curvatura escalar**, tenemos  $\bar{k} = \kappa \bar{n}$  y  $\kappa = (\bar{k} | \bar{n})$ . Es importante de notar que la curvatura espacial es siempre positiva, por definición. La recta determinada por el punto  $\bar{f}$  y el vector director  $\bar{n}$  es llamado **normal principal a  $C$**  en el punto considerado.

Para reparar la dirección del plan osculator, podemos usar un vector normal a este plan. A este fin, introducimos el vector  $\bar{b}$  definido de la siguiente manera:

$$\bar{b} = \bar{t} \wedge \bar{n}$$

que vamos a llamar **vector binormal**. La recta determinada por el punto  $\bar{f}$  y el vector director  $\bar{b}$  es llamado la **binormal a  $C$**  en el punto considerado.

El triplet de vectores  $(\bar{t}, \bar{n}, \bar{b})$  es llamado el **triedro de Frenet** (o de Serret-Frenet) de la curva o también el triedro movil. Podemos adicionar a este triplet el punto corriente  $\bar{f}$  sobre  $C$  para obtener la **referencia movil (o referencia de Serret-Frenet)**  $(\bar{f}; \bar{t}, \bar{n}, \bar{b})$ . La tangente, la normal principal la binormal son los ejes de coordenadas de esta referencia.

Vamos a decir ahora unas palabras del caso de curvatura nula. Eso puede pasarse por un punto o sobre todo un intervalo.

Proposición:

*Un arco es un segmento de recta si y solamente si su curvatura es nula en cada punto.*

Cuando la curvatura se anula en un punto, no hay ningun razon "geometrica" para escoger como vector normal uno o un otro de la infinidad de vectores unitarios ortogonales al vector tangente. El único criterio que podemos usar es de naturaleza diferente: vamos a tratar de definir un vector normal que sea, como se puede, una función continua. Los siguientes ejemplos van a dar una idea de lo que es posible y de lo que no es posible.

Ejemplos:

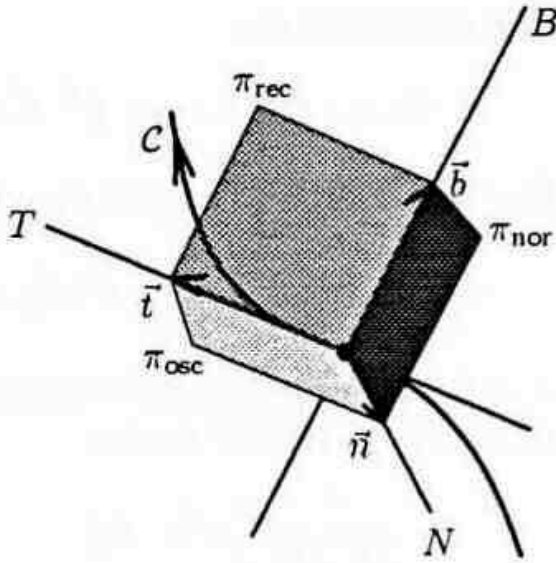


Figura 2.28:

1. Sea  $C$  el arco orientado representado por

$$k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 : t \rightarrow (t, \frac{1}{3}t^3, 0)$$

Como  $k'(t) = (1, t^2, 0)$ , el vector tangente en el punto  $k(t)$  es

$$\vec{t}(\sigma(t)) = \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}(1, t^2, 0)$$

$C$  es un arco plano. Usando las convenciones de los paragrafos anteriores, tenemos como vector normal:

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}(-t^2, 1, 0)$$

Pero cuando vemos  $C$  como un arco espacial, el vector normal tiene que ser dirigido en el sentido de la concavidad: entonces, tenemos

$$\vec{n}(\sigma(t)) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}(-t^2, 1, 0) & t > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}(t^2, -1, 0) & t < 0 \end{cases}$$

Para  $t = 0$ , es decir el origen, la curvatura se anula (para justificarlo mejor esperar las herramientas al fin de esta sección), entonces, el vector normal

no puede ser calculado normando el vector de curvatura y como además, tenemos

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \vec{n}(\sigma(t)) = (0, 1, 0) \neq (0, -1, 0) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \vec{n}(\sigma(t))$$

Así es imposible de definir  $\vec{n}(\sigma(0))$  por continuidad.

2. Sea

$$\begin{aligned} & \vec{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 : \\ s \rightarrow & \left( \frac{1}{2} \left( s + \int_0^s \cos t^3 dt \right), \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^s \sin t^3 dt, \frac{1}{2} \left( s - \int_0^s \cos t^3 dt \right) \right) \end{aligned}$$

Esta aplicación es una representación paramétrica de arco de clase  $C^\infty$  visto que para cualquier  $s$ ,

$$\vec{f}' = \left( \frac{1}{2} (1 + \cos s^3), \frac{1}{\sqrt{2}} \sin s^3, \frac{1}{2} (1 - \cos s^3) \right)$$

Entonces,

$$\|\vec{f}'(s)\| = 1$$

lo que significa que  $\vec{f}$  es una representación normal. Entonces,

$$\vec{k}(s) = \vec{f}'' = \left( -\frac{3}{2} s^2 \sin s^3, \frac{3}{\sqrt{2}} s^2 \cos s^3, \frac{3}{2} s^2 \sin s^3 \right)$$

y

$$\kappa(s) = \frac{3}{\sqrt{2}} s^2$$

La curvatura se anula en  $s = 0$ . En este punto, el vector tangente es  $(1, 0, 0)$  pero como

$$\begin{aligned} \vec{n}(s) &= \frac{\vec{k}(s)}{\kappa(s)} \\ &= \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s^3, \cos s^3, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin s^3 \right) \\ \lim_{s \rightarrow 0} \vec{n}(s) &= (0, 1, 0) \end{aligned}$$

Así podemos completar la definición de  $\vec{n}(s)$  en  $s = 0$  por

$$\vec{n}(0) = (0, 1, 0)$$

### 2.9.1 Torsión

Una curvatura de  $E_+^3(R)$  en general no es contenida en un plano. Su plano osculador cambia con el punto corriente.

Deseamos "medir" la manera de distinguir una curva izquierda de una curva derecha. Vamos a hacerlo estudiando las variaciones del plano osculador o más sencillamente del vector binormal que determina su dirección. El parámetro usando va a ser el abscisa curvilínea.

**Definición**

Sea  $C$  un arco espacial orientado, con  $\vec{f}: I \rightarrow R^3$  una representación paramétrica normal de clase  $C^3$ . Llamamos vector torsión de  $C$  la derivada del vector binormal  $\vec{\tau} = \vec{b}'$ .

Como  $\vec{b}$  es un vector constante en norma,  $\vec{b} \perp \vec{\tau}$ . Además, tenemos

$$\begin{aligned}\vec{\tau} &= \vec{b}' \\ &= (\vec{t} \wedge \vec{n})' \\ &= \vec{t}' \wedge \vec{n} + \vec{t} \wedge \vec{n}' \\ &= \vec{k} \wedge \vec{n} + \vec{t} \wedge \vec{n}' \\ &= \vec{t} \wedge \vec{n}'\end{aligned}$$

por que  $\vec{k}$  y  $\vec{n}$  son paralelos. Entonces,  $\vec{t} \perp \vec{\tau}$  y los vectores  $(\vec{n}$  y  $\vec{\tau})$  son paralelos. Además, tenemos

$$\vec{\tau} = -\tau \vec{n}$$

donde  $\tau$  es una función escalar llamada **torsión de la curva**. Otra manera de definirlo es

$$\tau = -(\vec{\tau} | \vec{n})$$

Hay que notar que la torsión puede ser positiva como negativa. El signo  $-$  fue introducido para que el signo de la torsión de la hélice circular:

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \\ z = bt \end{cases}$$

( $a > 0$ ) sea el signo de  $b$ . Así los tornillos o los sacacorchos ordinarios son de torsión positiva.

Notas:

Como  $(\vec{b} | \vec{n}) = 0$ , tenemos

$$\begin{aligned}0 &= (\vec{b} | \vec{n})' \\ &= (\vec{\tau} | \vec{n}) + (\vec{b} | \vec{n}') \\ \Rightarrow \tau &= -(\vec{\tau} | \vec{n}) = (\vec{b} | \vec{n}')\end{aligned}$$

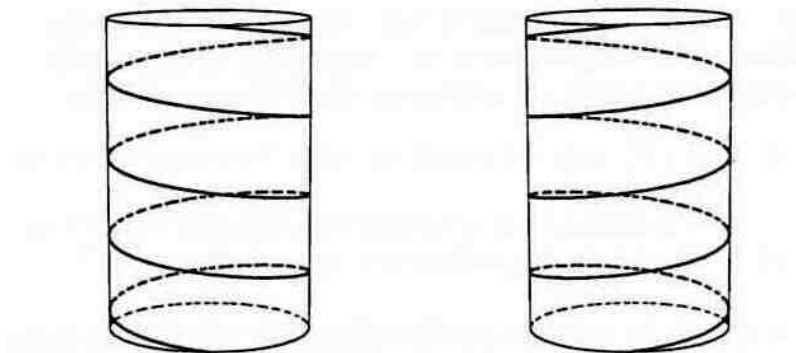


Figura 2.29: Primera figura representa una helice izquierda  $b < 0$  (torsión negativa) y la segunda figura (a la derecha) representa una helice derecha ( $b > 0$ ) (torsión positiva)

Las formulas de Serret-Frenet expresan las derivadas de los tres vectores del triedro local:

$$\begin{cases} \vec{t}' = \kappa \vec{n} \\ \vec{n}' = -\kappa \vec{t} + \tau \vec{b} \\ \vec{b}' = -\tau \vec{n} \end{cases}$$

O sobre forma matricial:

$$(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})' = (\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}) \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}$$

### 2.9.2 Proyecciones de la curva sobre los planos del triedro movil.

Consideramos, sobre una curva  $C$  de clase  $C^3$  un punto  $P_0$  en cual ninguno de la curvatura o de la torsion se anula. Podemos suponer que  $C$  es representada por una representación parametrica normal  $\vec{f}$  y tal que  $\vec{f}(s_0) = P_0$ . Vamos a acercarnos de  $\vec{f}$  usando su polinomios de Taylor de orden 3 en  $s_0$ . Por eso, primero, podemos notar que

$$\begin{aligned} \vec{f}''' &= \vec{k}' = (\kappa \vec{n})' \\ &= \kappa' \vec{n} + \kappa(-\kappa \vec{t} + \tau \vec{b}) \\ &= -\kappa^2 \vec{t} + \kappa' \vec{n} + \kappa \tau \vec{b} \end{aligned}$$



Y para facilitar las notaciones, vamos notar  $\vec{t}_0 = \vec{t}(s_0)$ . Así para  $s$  cerca de  $s_0$ ,

$$\begin{aligned}
\vec{f}(s) &\simeq \vec{f}(s_0) + (s - s_0)\vec{f}'(s_0) + \frac{(s - s_0)^2}{2}\vec{f}''(s_0) + \frac{(s - s_0)^3}{6}\vec{f}'''(s_0) \\
&= P + (s - s_0)\vec{t}_0 + \frac{(s - s_0)^2}{2}\kappa_0\vec{n}_0 + \frac{(s - s_0)^3}{6}\left(-\kappa_0^2\vec{t}_0 + \kappa_0'\vec{n}_0 + \kappa_0\tau_0\vec{b}_0\right) \\
&= P + \left((s - s_0) - \kappa_0^2\frac{(s - s_0)^3}{6}\right)\vec{t}_0 + \\
&\quad \left(\frac{(s - s_0)^2}{2}\kappa_0 + \kappa_0'\frac{(s - s_0)^3}{6}\right)\vec{n}_0 + \frac{(s - s_0)^3}{6}\kappa_0\tau_0\vec{b}_0 \\
&\simeq P + (s - s_0)\vec{t}_0 + \frac{(s - s_0)^2}{2}\kappa_0\vec{n}_0 + \frac{(s - s_0)^3}{6}\kappa_0\tau_0\vec{b}_0
\end{aligned}$$

si nos limitamos al termino dominante en el coeficiente de cada vector. Llamamos  $f^*$  la ultima aproximación,

$$f^*(s) \equiv P + (s - s_0)\vec{t}_0 + \frac{(s - s_0)^2}{2}\kappa_0\vec{n}_0 + \frac{(s - s_0)^3}{6}\kappa_0\tau_0\vec{b}_0$$

Trabajamos en la referencia de Frenet  $\mathcal{R}' = (P_0; \vec{t}_0, \vec{n}_0, \vec{b}_0)$  y notamos  $x', y'$  y  $z'$  las coordenadas en esta referencia. En tal caso, la expresión de  $f^*$  puede reescribirse como

$$\mathcal{R}' f^*(s) = \begin{pmatrix} s - s_0 \\ \frac{(s - s_0)^2}{2}\kappa_0 \\ \frac{(s - s_0)^3}{6}\kappa_0\tau_0 \end{pmatrix}$$

Localmente, alrededor de  $P$  la curva  $C^*$  representada por  $f^*$  es una buena aproximación de  $C$ .

- Notamos  $C_{osc}$  la proyección de  $C$  sobre su plano osculador en  $P$ . Esta proyección coincide de muy cerca con la proyección  $C_{osc}^*$  de  $C^*$  sobre el plano osculador que admite como representación paramétrica:

$$f_{osc}^* : R \rightarrow R^3 : s \rightarrow f_{osc}^*(s) \equiv P + (s - s_0)\vec{t}_0 + \frac{(s - s_0)^2}{2}\kappa_0\vec{n}_0$$

Usando otras palabras, tenemos que  $C_{osc}^*$  es descrita en  $\mathcal{R}'$  por

$$\begin{pmatrix} x' = s - s_0 \\ y' = \frac{(s - s_0)^2}{2}\kappa_0 \\ z' = 0 \end{pmatrix}$$

o también por las ecuaciones implícitas:

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{2}\kappa_0 x'^2 \\ z' = 0 \end{cases}$$

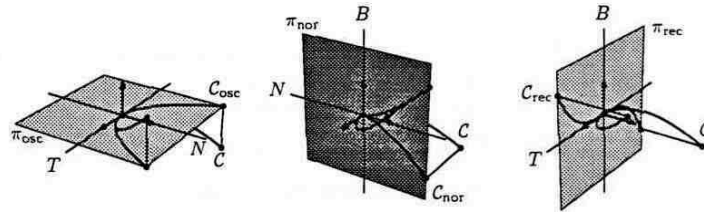


Figura 2.30:

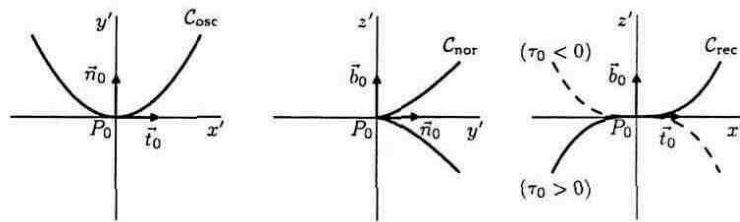


Figura 2.31:

- Notamos  $C_{nor}$  la proyección de  $C$  sobre su plan normal en  $P$ . Esta proyección coincide de muy cerca con la proyección  $C_{nor}^*$  de  $C^*$  sobre el plano normal que admite como representación paramétrica:

$$f_{nor}^* : R \rightarrow R^3 : s \rightarrow f_{nor}^*(s) \equiv P + \frac{(s-s_0)^2}{2} \kappa_0 \vec{n}_0 + \frac{(s-s_0)^3}{6} \kappa_0 \tau_0 \vec{b}_0$$

Usando otras palabras, tenemos que  $C_{nor}^*$  es descrita en  $\mathcal{R}'$  por

$$\begin{pmatrix} x' = 0 \\ y' = \frac{(s-s_0)^2}{2} \kappa_0 \\ z' = \frac{(s-s_0)^3}{6} \kappa_0 \tau_0 \end{pmatrix}$$

o también por las ecuaciones implícitas:

$$\begin{cases} y'^3 = \frac{9}{2} \frac{\kappa_0}{\tau_0} z'^2 \\ x' = 0 \end{cases}$$

### 2.9.3 Cálculo práctico de la curvatura y de la torsión.

En la práctica, las curvas no son siempre dadas por sus representaciones normales. Vamos a ver como expresar la curvatura y la torsión a partir de una

representación paramétrica  $f$  cualquiera de clase  $C^3$ .

$$\begin{aligned}
f &= \bar{f} \circ \sigma \\
f' &= (\bar{f}' \circ \sigma) \cdot \|f'\| \\
&= (\bar{t}' \circ \sigma) \cdot \|f'\| \\
f'' &= (\bar{t}' \circ \sigma) \cdot \|f'\|^2 + (\bar{t} \circ \sigma) \cdot \|f'\|' \\
&= (\bar{n} \circ \sigma) \cdot (\kappa \circ \sigma) \|f'\|^2 + (\bar{t} \circ \sigma) \|f'\|' \\
f''' &= (\bar{n}' \circ \sigma) (\kappa \circ \sigma) \|f'\|^3 + (\bar{n} \circ \sigma) \cdot (\kappa' \circ \sigma) \|f'\|^3 + \\
&\quad 2(\bar{n} \circ \sigma) \cdot (\kappa \circ \sigma) \|f'\| \cdot \|f'\|' + (\bar{t}' \circ \sigma) \|f'\|' \cdot \|f'\| + (\bar{t} \circ \sigma) \|f'\|'' \\
&= -(\bar{t} \circ \sigma) (\kappa \circ \sigma)^2 \|f'\|^3 + (\bar{b} \circ \sigma) \cdot (\kappa \circ \sigma) (\tau \circ \sigma) \|f'\|^3 + \\
&\quad (\bar{n} \circ \sigma) \cdot (\kappa' \circ \sigma) \|f'\|^3 + 3(\bar{n} \circ \sigma) \cdot (\kappa \circ \sigma) \|f'\| \cdot \|f'\|' + (\bar{t} \circ \sigma) \|f'\|'' \\
&= (\bar{t} \circ \sigma) \left( \|f'\|'' - (\kappa \circ \sigma)^2 \|f'\|^3 \right) + \\
&\quad (\bar{n} \circ \sigma) \cdot \left( (\kappa' \circ \sigma) \|f'\|^3 + 3(\kappa \circ \sigma) \|f'\| \cdot \|f'\|' \right) + \\
&\quad (\bar{b} \circ \sigma) (\kappa \circ \sigma) (\tau \circ \sigma) \|f'\|^3
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
f' \wedge f'' &= (\bar{b} \circ \sigma) \cdot (\kappa \circ \sigma) \|f'\|^3 \\
\|f' \wedge f''\| &= (\kappa \circ \sigma) \|f'\|^3 \\
\Rightarrow (\kappa \circ \sigma) &= \frac{\|f' \wedge f''\|}{\|f'\|^3}
\end{aligned}$$

Finalmente, tenemos

$$\kappa = \frac{\|f' \wedge f''\|}{\|f'\|^3} \circ \sigma^{-1}$$

Ademas, tenemos

$$\begin{aligned}
[f', f'', f'''] &= (f' \wedge f'' | f''') \\
&= (\kappa \circ \sigma)^2 (\tau \circ \sigma) \|f'\|^6 \\
&= \|f' \wedge f''\|^2 (\tau \circ \sigma)
\end{aligned}$$

de tal manera que tenemos por la torsión:

$$\begin{aligned}
 (\tau \circ \sigma) &= \frac{[f', f'', f''']}{\|f' \wedge f''\|^2} \\
 \Rightarrow \tau &= \frac{[f', f'', f''']}{\|f' \wedge f''\|^2} \circ \sigma^{-1}
 \end{aligned}$$

Como consecuencia de esos resultados, tenemos las dos propiedades siguientes:

Proposición:

*la curvatura es nula si y solamente si  $f'$  y  $f''$  son linealmente independiente.*

Proposición:

*Si la curvatura no es nula, el plan osculador admite  $f'$  y  $f''$  como vectores directores.*

## Capitulo 3

# Superficie

De la misma manera que nuestra intuición inicial de una curva es un pedazo de recta real, deformada y sumergida en un espacio euclidiano, vamos esencialmente pensar las superficies como pedazos del plan  $R^2$  etirados, curvados y torcidos... Es decir que las superficies van a estar estudiadas via representaciones parametricas.

Como en el capitulo anterior, vamos a distinguir las propiedades afines de las superficies (como la noción de curvas trazadas sobre una superficie, plan tangent, ...) y las propiedades metricas (area de una porción de superficie, la primera forma fundamental y los multiples aspectos de la curvatura).

Al final de este capitulo, vamos a describir dos categorias de superficies particulares pero muy importantes para las aplicaciones: superficies arregladas y superficies de revolución.

### 3.1 Definiciones

Antes de todo, tenemos que definir las partes de  $R^n$  destinadas a jugar, en un espacio de dimensión cualquiera, el papel de los intervalos abiertos de la linea real.

#### Definición:

Una parte  $U \subseteq R^n$  es llamada conexa si y solamente si cada vez que  $U_1, U_2 \subseteq R^n$  son abiertos disjuntos tales que  $U_1 \cup U_2 \supseteq U$ , sea  $U_1 \supseteq U$  y  $U_2 = \emptyset$ , sea  $U_2 \supseteq U$  y  $U_1 = \emptyset$ .

#### Notas:

1. el "sea...sea..." excluye  $U = \emptyset$  de los conexos.
2. el marco natural de esta definición es un curso de topologia general. La idea de base es que un abierto conexo es "de uno solo pedazo". Por ejemplo, en  $R^2$ ,  $R^2$  el mismo,  $R^2 \setminus \{(0,0)\}$ ,  $] -1, 1[ \times ] -1, 1[$  son conexos.  $R^* \times R$  o  $D_+ \cup D_-$  no lo son (si  $D_{\pm}$  designo el disco abierto de radio 1 y de

centro  $(\pm 2, 0)$ ). De hecho, en el primer caso, podemos tomar  $U_1 = R_-^* \times R$  y  $U_2 = R_+^* \times R$ . En el segundo caso, podemos tomar  $U_{1,2} = D_{\pm}$ .

Proposición:

*Una parte abierta de  $R$  es conexa si y solamente si esta parte es un intervalo no-vacio.*

Proposición:

*Un abierto  $U$  es conexo si y solamente si dos cualquiera de sus puntos son ligados por una línea rota contenida en  $U$ .*

Ahora vamos a dar las definiciones de superficies que son practicamente una copia de las definiciones correspondientes para las curvas. Sea  $E$  un espacio afin real y sea  $k$  un número entero.

Definición:

*Sea  $U$  y  $V$  dos abiertos de  $R^2$ ,  $\varphi : U \rightarrow V$  es un difeomorfismo de clase  $C^k$  si  $\varphi$  es biyectiva y si  $\varphi$  y  $\varphi^{-1}$  son de clase  $C^k$ .*

Definición:

*Una representación paramétrica de una sabana<sup>1</sup> de clase  $C^k$  en  $E$  es una aplicación  $f : U \rightarrow \mathcal{E}$  inyectiva y de clase  $C^k$  con  $U$  un abierto conexo de  $R^2$ .*

Definición:

*Dos representaciones paramétricas de sabana de clase  $C^k$  en  $E$ ,  $f : U \rightarrow \mathcal{E}$  y  $g : V \rightarrow \mathcal{E}$  son dichas equivalentes en clase  $C^k$  si existe un difeomorfismo de clase  $C^k$ ,  $\varphi : U \rightarrow V$  tal que  $f = g \circ \varphi$ .*

Definición:

*Una superficie de clase  $C^k$  en  $E$  es una clase de equivalencia de representaciones paramétricas de sabana de clase  $C^k$  en  $E$  por la equivalencia en clase  $C^k$ .*

Definición:

*Una representación paramétrica de superficie de clase  $C^k$  en  $E$  es una aplicación  $f : U \rightarrow \mathcal{E}$  donde  $U$  es un abierto no-vacio de  $R^2$  tal que para cada  $(u, v) \in U$ , existe un abierto conexo  $U_{(u,v)}$  tal que  $(u, v) \in U_{(u,v)} \subseteq U$  y que  $f_{U_{(u,v)}}$  es una representación paramétrica de sabana de clase  $C^k$  en  $E$ .*

Definición:

*Dos representaciones paramétricas de superficies de clase  $C^k$  en  $E$ ,  $f : U \rightarrow \mathcal{E}$  y  $g : V \rightarrow \mathcal{E}$  son dichas equivalentes en clase  $C^k$  si existe un difeomorfismo de clase  $C^k$   $\varphi : U \rightarrow V$  tal que  $f = g \circ \varphi$ .*

Notas:

Es un poco fastidioso de repetir definiciones tan cerca a las definiciones del capitulo anterior. De hecho, podríamos integrar todas esas nociones en una noción mas general, la noción de variedad de dimensión  $n$  de clase  $C^k$  en un espacio afin real:  $n = 1$  para una curva y  $n = 2$  para una superficie. Preferimos evitarlo para que el discurso no sea demasiado abstracto desde el inicio.

---

<sup>1</sup> otro termino que puede usarse en lugar de sabana es "hoja de superficie".

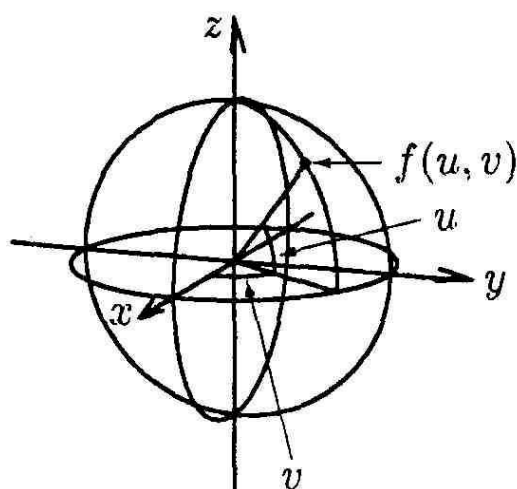


Figura 3.1:

Ejemplos:

1. La paraboloida hiperbolica  $Q \equiv z = x^2 - y^2$ . Para obtener una representación parametrica, lo mas sencillo es de tomar  $x$  y  $y$  por parametros. Asi obtenemos:

$$f : R^2 \rightarrow R^3 : (u, v) \rightarrow (u, v, u^2 - v^2)$$

y es una representación parametrica de sabana de clase  $C^\infty$ .

2. Para representar la esfera de radio  $R$  centrado en el origen, queremos usar :

$$f : R^2 \rightarrow R^3 : (u, v) = (R \cos u \cos v, R \cos u \sin v, R \sin u)$$

Pero para obtener el polo Norte  $N$  deberiamos dar a  $f$  argumentos  $u = \pi/2 + 2k\pi$  ( $k \in Z$ ) y  $v$  cualquiera. Pero  $f$  no es inyectiva sobre ningun vecindad de tal punto. Asi no va a ser posible de esta manera de representar la esfera con una representación parametrica de sabana.

Pero,

$$f_1 : \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ \times ] -\pi, \pi[ \rightarrow R^3 : \\ (u, v) = (R \cos u \cos v, R \cos u \sin v, R \sin u)$$

es inyectiva y representa la esfera privada de un meridian que pasa por

$(-R, 0, 0)$ . De misma manera,

$$f_2 : \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ \times ] -\pi, \pi[ \rightarrow R^3 : \\ (u, v) = (-R \cos u \cos v, R \sin u, R \cos u \sin v)$$

es inyectiva y representa la esfera privada del arco del ecuador que va de  $(0, -R, 0)$  a  $(0, R, 0)$ . Entonces,

$$f^* : \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ \times (]-2\pi, 0[ \cup ]0, 2\pi]) \rightarrow R^3 : \\ (u, v) \rightarrow \begin{cases} f_1(u, v + \pi) & v < 0 \\ f_2(u, v - \pi) & v > 0 \end{cases}$$

es una representación paramétrica de superficie describiendo toda la esfera.

3. Otra representación paramétrica de superficie describiendo la esfera es :

$$g^* : R^* \times R \rightarrow R^3 : \\ (u, v) \rightarrow \left( \frac{2 \ln |u|}{\ln^2 |u| + v^2 + 1}, \frac{2v}{\ln^2 |u| + v^2 + 1}, \operatorname{sgn}(u) \frac{\ln^2 |u| + v^2 - 1}{\ln^2 |u| + v^2 + 1} \right)$$

la restricción de  $g$  a  $R_+^* \times R$  (resp.  $R_-^* \times R$ ) es una representación paramétrica de sabana de la esfera privado del polo norte (resp. polo sur).

4. El cono de ecuación  $z^2 = x^2 + y^2$  debería poder representarse por

$$f : R^2 \rightarrow R^3 : (u, v) \rightarrow (u \cos v, u \sin v, u)$$

Pero esta función no es inyectiva, entonces no es una representación paramétrica de sabana. Pero la pregunta es de saber si es una representación paramétrica de superficie. Si  $u_0 > 0$ , el punto  $(u_0, v_0)$  admite una vecindad abierto conexo  $R_+^* \times ]v_0 - \pi, v_0 + \pi[$  sobre cual la restricción de  $f$  es inyectiva. De la misma manera si  $u_0 < 0$ . Pero cerca del punto  $(0, v_0)$  no podemos encontrar una vecindad abierta sobre cual la restricción de  $f$  sea inyectiva. En conclusión,  $f$  no puede ser una representación paramétrica de superficie. Para representar la sabana superior, de ecuación  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ , lo mas sencillo es de tomar  $x$  y  $y$  como parametros, es decir usar la representación paramétrica de sabana:

$$g_+ : R^2 \rightarrow R^3 : (u, v) \rightarrow (u, v, \sqrt{v^2 + u^2})$$

De la misma manera, para la sabana inferior, tenemos como representación paramétrica de sabana:

$$g_- : R^2 \rightarrow R^3 : (u, v) \rightarrow (u, v, -\sqrt{v^2 + u^2})$$

Para representar todo el cono, una solución es de combinar  $g_{\pm}$ :

$$g : R^* \times R \rightarrow R^3 : \\ (u, v) \rightarrow (\ln |u|, v, \operatorname{sgn}(u) \sqrt{\ln^2 |u| + v^2})$$



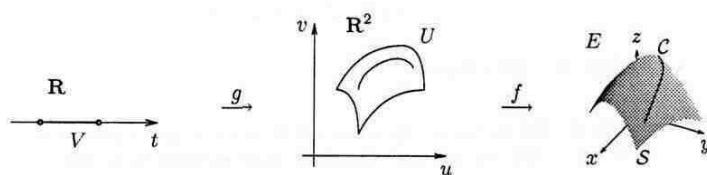


Figura 3.2:

como el dominio de  $g$  no es conexo, no es una representación paramétrica de sabana pero es solamente una representación paramétrica de superficie. Además,  $g$  no es derivable, entonces es una representación paramétrica de superficie de clase  $C^0$ .

### 3.2 Curvas sobre una superficie

Sea una superficie  $S$  representada por  $f : U \rightarrow \mathcal{E}$ . Para trazar una curva  $C$  sobre  $S$ , podemos primero trazar el abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$ , via  $g : V \rightarrow U$  donde  $V$  es un abierto de  $\mathbb{R}$  y después considerar la composición:  $f \circ g : V \rightarrow \mathcal{E}$ .

#### Definición:

la curva representada por  $h : V \rightarrow \mathcal{E}$  es dicha trazada sobre la superficie representado por  $f : U \rightarrow \mathcal{E}$  si existe  $g : V \rightarrow U$  tal que  $h = f \circ g$ .

#### Notas:

1. si tenemos cambios de parametros (difeomorfismos)  $\varphi$  tal que  $f = \tilde{f} \circ \varphi$  y  $\psi$  tal que  $h = \tilde{h} \circ \psi$ , entonces definiendo

$$\tilde{g} \equiv \varphi \circ g \circ \psi^{-1} \quad (3.1)$$

tenemos

$$\tilde{f} \circ \tilde{g} = h \circ \psi^{-1} = \tilde{h}$$

la noción de curva trazada sobre una superficie no depende entonces de las representaciones paramétricas. Así podemos reexpresar la relación (3.1) usando el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{g} & U \\ \downarrow \psi & & \downarrow \varphi \\ \tilde{V} & \xrightarrow{\tilde{g}} & \tilde{U} \end{array}$$

A notar que este diagrama es conmutativo.

2. Si  $f$  es una representación paramétrica de sabana, para una representación paramétrica  $h$  de curva trazada sobre la sabana, la función  $g$  tal que

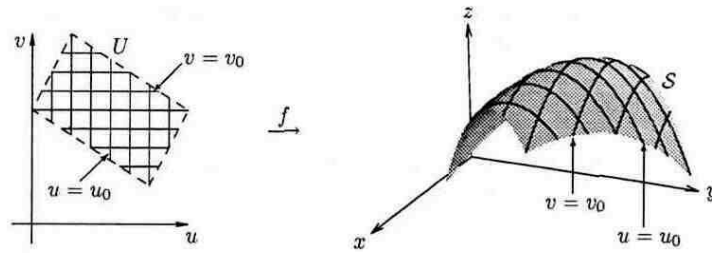


Figura 3.3:

$h = f \circ g$  es única. De hecho, una aplicación  $f : U \rightarrow X$  es inyectiva si y solamente si para cualquier aplicaciones  $g, g' : V \rightarrow U$ ,

$$f \circ g = f \circ g' \Rightarrow g = g'$$

### 3.2.1 Coordenadas curvilíneas.

Parmi todas las curvas trazadas en el abierto  $U$ , hay en particular las curvas  $u = \text{constante}$  que admite representaciones paramétricas de la siguiente forma:

$$g_{u_0} : I_{u_0} \rightarrow U : t \rightarrow (u_0, t)$$

donde  $u_0$  es fijo y  $I_{u_0} \equiv \{t \in \mathbb{R} : (u_0, t) \in U\}$ . Haciendo la composición de esas representaciones paramétricas con una representaciones paramétricas de superficie  $f : U \rightarrow \mathcal{E}$ , obtenemos **las curvas de parámetros  $v$  (o curvas de coordenadas curvilíneas o curvas  $u = \text{constante}$ )**.

La curva de parámetro  $v$  correspondiendo a  $u = u_0$  admite entonces como representación paramétrica:

$$f \circ g_{u_0} : I_{u_0} \rightarrow \mathcal{E} : t \rightarrow f(u_0, t)$$

Podemos hacer igual con el otro parámetro.

El punto  $f(u, v)$  de la sabana representada por  $f : U \rightarrow \mathcal{E}$  es a veces llamada punto de coordenadas curvilíneas  $(u, v)$ .

Ejemplos:

1. En el caso de

$$f : \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 : \\ (u, v) \rightarrow (R \cos u \cos v, R \cos u \sin v, R \sin u)$$

que representa la esfera de radio  $R$  centrada en el origen, privada de sus dos polos, las curvas de parametros  $v$  son representaciones parametricas de la forma:

$$f \circ g_{u_0} : R \rightarrow R^3 \\ t \rightarrow (R \cos u_0 \cos t, R \cos u_0 \sin t, R \sin u_0)$$

son los paralelos. Las curvas de parametros  $u$  que tienen como representaciones parametricas:

$$f \circ k_{v_0} \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ \rightarrow R^3 : \\ t \rightarrow (R \cos t \cos v_0, R \cos t \sin v_0, R \sin t)$$

son los meridianos.

2. Para representar el grafico de una función de dos variables, otramente dicho la superficie  $G_f$  de ecuación  $z = f(x, y)$  en  $E^3(R)$  lo mas sencillo es de tomar  $x$  y  $y$  como parametros. Asi obtenemos la representación parametrica:

$$\bar{f} : \text{dom } f \rightarrow R^3 : (u, v) \rightarrow (u, v, f(u, v))$$

Un tal representación parametrica es dicha representación parametrica de Monge. Las curvas de coordenadas son sencillamente las secciones de  $G_f$  por los planos paralelos a  $Oxz$  de una parte y a  $Oyz$  de otra parte.

### 3.3 Planos tangentes

Sea  $S$  una sabana de clase  $C^1$  en  $E$ , representada por  $f : U \rightarrow \mathcal{E}$  y sea  $P = f(u_0, v_0)$  un punto de  $S$ .

Sea  $C$  un arco de clase  $C^1$  trazado sobre  $S$  pasando por  $P$ ,  $C$  es representado por  $h = f \circ g$  con  $g : I \rightarrow U$  donde  $I$  es un intervalo abierto de  $R$ . Como  $P$  es un punto de  $C$ , existe  $t_0 \in I$ , tal que  $g(t_0) = (u_0, v_0)$ .

Nos interesamos a la tangente a  $C$  en  $P$ . Su dirección es determinada por el vector director:

$$h'(t_0) = (f \circ g)'(t_0) \\ = \partial_1 f(g(t_0)) \cdot g_1'(t_0) + \partial_2 f(g(t_0)) \cdot g_2'(t_0)$$

Este vector director es una combinación lineal de  $\partial_1 f(u_0, v_0)$  y  $\partial_2 f(u_0, v_0)$ . Si esos dos ultimos vectores son linealmente independientes, van a determinar la dirección del plano  $\pi$  que contiene la tangente a  $C$  en  $P$ . Como esto razonamiento puede ser usado para cualquier curva regular trazada sobre  $S$  y pasando por  $P$ , podemos afirmar que las tangentes a todas esas curvas son contenidas en el plano  $\pi$ . Por eso, este plano va a llamarse **plano tangente a  $S$  en  $P$** .

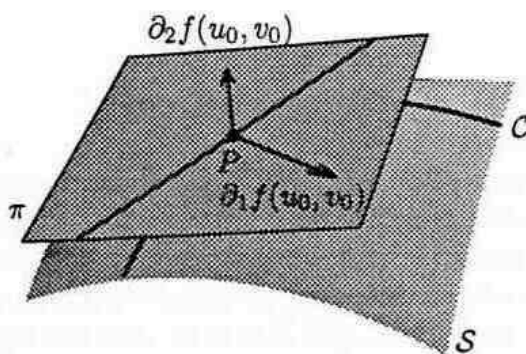


Figura 3.4:

Primero, vamos a averiguar que esta definición no depende de la representación paramétrica.

Sea  $\tilde{f} : \tilde{U} \rightarrow \mathcal{E}$  una representación paramétrica de clase  $C^1$  de la sabana  $S$ , equivalente a  $f$  en clase  $C^1$  via el cambio de parametros  $\varphi : U \rightarrow \tilde{U}$ :

$$f = \tilde{f} \circ \varphi$$

Así, si  $(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0) = \varphi(u_0, v_0)$ ,

$$\begin{cases} \partial_1 f(u_0, v_0) = \partial_1 \tilde{f}(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0) \cdot \partial_1 \varphi_1(u_0, v_0) + \partial_2 \tilde{f}(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0) \cdot \partial_1 \varphi_2(u_0, v_0) \\ \partial_2 f(u_0, v_0) = \partial_1 \tilde{f}(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0) \cdot \partial_2 \varphi_1(u_0, v_0) + \partial_2 \tilde{f}(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0) \cdot \partial_2 \varphi_2(u_0, v_0) \end{cases}$$

En otro termino,

$$Jf(u_0, v_0) = J\tilde{f}(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0) \cdot J\varphi(u_0, v_0)$$

donde

$$Jf \equiv \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \partial_2 f_1 \\ \partial_1 f_2 & \partial_2 f_2 \end{pmatrix}$$

es la matriz jacobiana de  $f$ .

Como el cambio de parametros es biyectivo,  $J\varphi$  es una matriz regular, lo que hay como consecuencia que  $\partial_1 \tilde{f}(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0)$  y  $\partial_2 \tilde{f}(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0)$  son linealmente independientes si y solamente si  $\partial_1 f(u_0, v_0)$  y  $\partial_2 f(u_0, v_0)$  son linealmente independientes. Además,  $\partial_1 f(u_0, v_0)$  y  $\partial_2 f(u_0, v_0)$  de una parte, y  $\partial_1 \tilde{f}(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0)$  y  $\partial_2 \tilde{f}(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0)$  de otra parte, engendran el mismo plano vectorial. Así la definición siguiente tiene sentido:

**Definición:**

Un punto de sabana de clase  $C^1$  en un espacio afín real  $E$  es dicho regular si en este punto, las derivadas parciales de la representación paramétrica son linealmente independiente. Un punto no-regular es dicho singular. Una sabana es dicha regular si es de clase  $C^1$  y si todos sus puntos son regulares.

Ejemplos:

El plano de ecuación  $z = z_0$  de  $A^3(R)$  puede ser representado en clase  $C^1$  por

$$f : R^2 \rightarrow R^3 : (u, v) \rightarrow (u + v, v^3, z_0)$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\partial_1 f(u, v) &= (1, 0, 0) \\ \partial_2 f(u, v) &= (1, 3v^2, 0)\end{aligned}$$

Esos vectores son siempre diferentes de cero y son linealmente independientes si y solamente si  $v \neq 0$ . Los puntos  $f(u, 0) = (u, 0, z_0)$  es entonces singulares.

Pero es claro que este plan admite igualmente la representación paramétrica siguiente

$$g : R^2 \rightarrow R^3 : (u, v) \rightarrow (u, v, z_0)$$

que es de clase  $C^1$  al menos y es fácil de averiguar que  $g$  es regular. Entonces,  $f$  y  $g$  no son equivalente en clase  $C^1$ , lo que puede verificarse fácilmente pero son equivalente en clase  $C^0$ .

**Definición:**

*El plano tangente a una sabana  $S$  de clase  $C^1$  en un punto regular  $P$  es el plano afín pasando por este punto y paralelo a las derivadas parciales de una representación paramétrica, lo notamos  $T_P S$ . Cualquier vector perteneciendo a las direcciones de este plano son declarado vectores tangente a la sabana en el punto dado.*

Ejemplos:

1. la paraboloida hiperbolica de ecuación:  $z = x^2 - y^2$  admite la representación

$$f : R^2 \rightarrow R^3 : (u, v) \rightarrow (u, v, u^2 - v^2)$$

que es una representación paramétrica de sabana de clase  $C^\infty$ . Entonces, tenemos

$$\begin{aligned}\partial_1 f(u, v) &= (1, 0, 2u) \\ \partial_2 f(u, v) &= (0, 1, 2v)\end{aligned}$$

que son dos vectores linealmente independientes para cualquier valor de  $(u, v)$ , entonces, cualquier punto de la paraboloida hiperbolica es regular. En el punto de parametro  $(a, b)$ , el plano tangente tiene como ecuaciones paramétricas

$$: \begin{cases} x = a + u \\ y = b + v \\ z = a^2 - b^2 + 2au - 2bv \end{cases}$$

y de ecuación cartesiana:

$$z = 2ax - 2by - a^2 + b^2$$

2. La hiperboloida tiene una sabana de ecuación  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$  admite como representación paramétrica de superficie de clase  $C^\infty$ :

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : \\ (u, v) \rightarrow (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, \sinh u)$$

Hallamos

$$\partial_1 f(u, v) = (\sinh u \cos v, \sinh u \sin v, \cosh u) \\ \partial_2 f(u, v) = (-\cosh u \sin v, \cosh u \cos v, 0)$$

Es fácil de convencerse que esos dos vectores son linealmente independientes para cualquier valores de  $u$  y  $v$ . Con eso podemos calcular fácilmente la ecuación paramétrica del plano tangente en el punto de parámetros  $(u, v)$ .

Proposición:

Sea  $P$  un punto regular de una sabana  $S$  de clase  $C^1$ , las tangentes a  $P$  ( $P$  punto regular de  $S$ ) a todas las curvas de clase  $C^1$  trazadas sobre  $S$  son contenidas en el plano tangente a  $S$  en  $P$ .

Notas:

Como caso particular, es importante de notar que, en el punto de parámetro  $(u_0, v_0)$ ,

- el vector  $\partial_1 f(u_0, v_0)$  es un vector director de la tangente a la curva  $v = v_0$ .
- el vector  $\partial_2 f(u_0, v_0)$  es un vector director de la tangente a la curva  $u = u_0$ .

Ahora vamos a dar un lema técnico que va a ser útil en el futuro:

Lema:

Sea  $P$  un punto regular de una sabana  $S$  de clase  $C^1$ . Para cualquier vector  $w$  tangente a  $S$  en  $P$ , existe una curva trazada sobre  $S$  representada por  $h$  de clase  $C^1$  tal que  $h(0) = P$  y  $h'(0) = w$ .

### 3.3.1 Orientación.

Sea  $\varphi : U \rightarrow V$  un cambio de parámetros de clase  $C^1$ . Tenemos entonces la siguiente matriz jacobiana de  $\varphi$ :

$$J\varphi = \begin{pmatrix} \partial_1 \varphi_1 & \partial_2 \varphi_1 \\ \partial_1 \varphi_2 & \partial_2 \varphi_2 \end{pmatrix}$$

y como recordamos en la sección anterior, esta matriz es regular en cualquier punto de  $U$ . Vamos a decir que  $\varphi$  **preserva la orientación (resp. invierte la orientación)** si y solamente si  $\det(J\varphi) > 0$  (resp.  $\det(J\varphi) < 0$ ).

Ejemplos:

1. La biyección  $\varphi : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : (u, v) \rightarrow (\ln u, v)$  preserva su jacobiano. De hecho, su jacobiana es igual a

$$J\varphi = \begin{pmatrix} 1/u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y su determinante es estrictamente positivo sobre el dominio de definición de  $\varphi$ .

2. El intercambio de parametros es realizado por la biyección:

$$\varphi : U \rightarrow V : (u, v) \rightarrow (v, u)$$

que es un cambio de parametros de clase  $C^\infty$ . La matriz jacobiana es

$$J\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

de determinante igual a  $-1$ . Este cambio de parametros invirtio la orientación.

**Definición:**

*Dos representaciones parametricas de sabana de clase  $C^1$  en  $E$ ,  $f : U \rightarrow \mathcal{E}$  y  $g : V \rightarrow \mathcal{E}$  son equivalentes y de misma orientación si existe un cambio de parametros preservando la orientación tal que  $\varphi : U \rightarrow V : f = g \circ \varphi$ .*

**Definición:**

*Una sabana orientada de clase  $C^1$  es una clase de equivalencia de representación parametrica de sabana en clase  $C^1$  por la relación "ser equivalente y de la misma orientación".*

Sea entonces,  $f : U \rightarrow \mathcal{E}$  y  $g : V \rightarrow \mathcal{E}$  dos representaciones parametricas regulares y equivalentes en clase  $C^1$  via  $\varphi : f = g \circ \varphi$ . En esta condición, tenemos

$$Jf = (Jg \circ \varphi) \cdot J\varphi$$

Entonces, la matriz jacobiana es la matriz de cambio de base de la base  $Jg$  a la base  $Jf$ :

$$J\varphi =_{(Jg \circ \varphi)} (I)_{Jf}$$

Asi podemos escribir la siguiente proposición:

**Proposición:**

*Sea  $f : U \rightarrow \mathcal{E}$  y  $g : V \rightarrow \mathcal{E}$  dos representaciones parametricas de una sabana en  $E$  equivalente en clase  $C^1$ . Esas dos representaciones parametricas son de misma orientación (resp. de orientación opuesta) si y solamente si las bases  $Jf$  y  $Jg$  de la dirección del plano tangente son de misma orientación (resp. de orientación opuesta).*

### 3.4 Área

El problema de la definición de la area de una sabana mas difícil de lo que parece. Hasta el XIX siglo, la opinión estuvo que estuvo suficiente de considerar el límite del area de una superficie poliedrica inscrita, haciendo tender a cero los lados de las diferentes caras, de manera analoga a lo que se hecho para definir la longitud de un arco. Pero en 1880, Schwarz enseñó un contra-ejemplo. Fue finalmente Lebesgue en su tesis de doctorado que resolvió este problema (1902).

En práctica, para el cálculo del area, vamos a usar la siguiente proposición que vamos a admitir sin demostración:

Proposición:

Sea  $S$  una sabana representada por  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ , de clase  $C^1$ . En esas condiciones, podemos calcular la area de  $S$  si y solamente si

$$\iint_U \|\partial_1 f \wedge \partial_2 f\|$$

converge y en este caso, la area de  $S$  es igual a el valor del integral.

Ejemplo:

la función

$$\begin{aligned} f & : \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ \times ] -\pi, \pi[ \rightarrow \mathbb{R}^3 : \\ (u, v) & \rightarrow (R \cos u \cos v, R \cos u \sin v, R \sin u) \end{aligned}$$

representa la esfera de radio  $R$  centrada en el origen. Tenemos

$$\begin{aligned} \partial_1 f(u, v) & = (-R \sin u \cos v, -R \sin u \sin v, R \cos u) \\ \partial_2 f(u, v) & = (-R \cos u \sin v, R \cos u \cos v, 0) \end{aligned}$$

Y entonces,

$$\begin{aligned} \|\partial_1 f \wedge \partial_2 f\| & = \\ & = \|(-R^2 \cos^2 u \cos v, -R^2 \cos^2 u \sin v, -R^2 \sin u \cos u)\| \\ & = R^2 \cos u \end{aligned}$$

La integral doble de la proposición vale entonces

$$\int_{-\pi/2 < u < \pi/2} \int_{-\pi < v < \pi} \|\partial_1 f \wedge \partial_2 f\| = 4\pi R^2$$

### 3.5 Vector normal

Si  $S$  es una sabana regular orientada dada por una representación paramétrica  $f$  de clase  $C^1$ , los vectores  $\partial_1 f$  y  $\partial_2 f$  son tangentes a  $S$ , entonces, el vector



$\partial_1 f \wedge \partial_2 f$  es en cada punto de  $S$  normal al plano tangente a  $S$ . El vector unitario correspondiente :

$$\vec{u} \equiv \frac{\partial_1 f \wedge \partial_2 f}{\|\partial_1 f \wedge \partial_2 f\|}$$

no depende de la representación paramétrica escogida ( en la misma orientación que  $f$ ). Este vector se llama **vector normal a  $S$** .

Hay que notar que si cambiamos la orientación escogida por la orientación opuesta, el vector normal es cambiado por su opuesto. Escoger una orientación de una sabana regular es entonces igualmente escoger un vector normal unitario en cada punto de la sabana, este vector normal es una función continua de los parametros.

Cuando en lugar de trabajar sobre la sabana, trabajamos sobre una superficie, una tal elección puede no ser posible. Si tal elección es posible, vamos a decir que la superficie es orientable. Dos ejemplos famosos de superficies no orientable son la cinta de Möbius y la botella de Klein que tienen en los dos casos solamente una cara.

### 3.6 Primera forma fundamental

Sea  $S$  una sabana regular. Si queremos estudiar arcos trazados sobre  $S$ , es claro que podemos usar las técnicas que vimos en el capítulo anterior, es decir ignorar completamente que esos arcos están trazados sobre  $S$ . Pero probablemente no es el acercamiento lo más adecuado.

Sea  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ . una representación paramétrica de  $S$  de clase  $C^1$ . Consideremos un arco  $C$  trazado sobre  $S$  representado por  $h = f \circ g$  donde  $g : I \rightarrow U$  es de clase  $C^1$ .

Sea dos puntos  $a < b$  de  $I$ . Vimos en el capítulo anterior que la longitud del arco  $C$  entre los puntos  $A = h(a)$  y  $B = h(b)$  es igual a

$$\begin{aligned} L &= \int_I \|h'\| \\ &= \int_I \|(f \circ g)'\| \\ &= \int_I \|(\partial_1 f \circ g) \cdot g'_1 + (\partial_2 f \circ g) \cdot g'_2\| \end{aligned}$$

La función a integrar es entonces la norma del vector tales que sus componentes, en la base  $Jf \circ g$  de la dirección del plano tangente son  $g'_1$  y  $g'_2$ . En general, esta base no es ortonormal. Si nos recordamos que

$$(u|v) = ({}_e u)^\dagger \cdot G_e \cdot v$$

donde  $G_e$  es la matriz representando el producto escalar en la base  $e$  :

$$G_e = \begin{pmatrix} (e_1|e_1) & \cdots & (e_1|e_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (e_n|e_1) & \cdots & (e_n|e_n) \end{pmatrix}$$

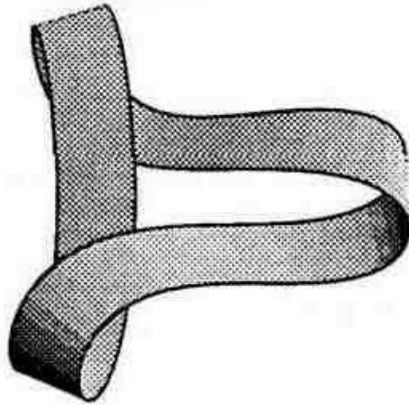
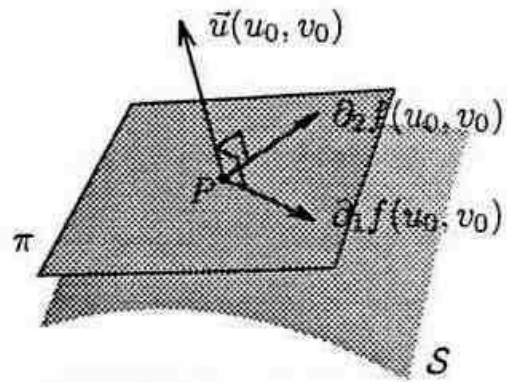


Figura 3.5:

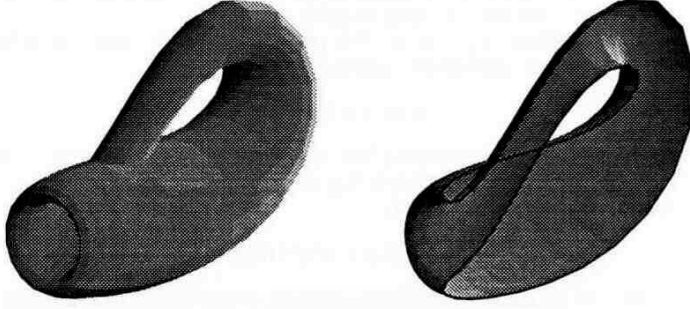


Figura 3.6: cinta de Möbius y la botella de Klein

Entonces, aquí tenemos,

$$\|(f \circ g)'\| = \sqrt{(g'_1 \ g'_2) \cdot \left( \begin{pmatrix} (\partial_1 f | \partial_1 f) & (\partial_1 f | \partial_2 f) \\ (\partial_2 f | \partial_1 f) & (\partial_2 f | \partial_2 f) \end{pmatrix} \circ g \right) \cdot \begin{pmatrix} g'_1 \\ g'_2 \end{pmatrix}}$$

y

$$L = \int_I \sqrt{(g'_1 \ g'_2) \cdot (G_{Jf} \circ g) \cdot \begin{pmatrix} g'_1 \\ g'_2 \end{pmatrix}}$$

Y si introducimos la matriz,

$$G_{Jf} = \begin{pmatrix} (\partial_1 f | \partial_1 f) & (\partial_1 f | \partial_2 f) \\ (\partial_2 f | \partial_1 f) & (\partial_2 f | \partial_2 f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

Los tres elementos  $E, F, G$  son los productos escalares, dos a dos, de las derivadas parciales de la representación paramétrica. Así es importante de notar que no son constantes pero son funciones definidas sobre  $U$ .

Naturalmente,  $G_{Jf}$ , matriz del producto escalar, es positiva y definida y entonces su determinante es estrictamente positivo:

$$\det G_{Jf} = EG - F^2 > 0$$

Además, esta expresión admite una interpretación geométrica interesante: de hecho, el determinante de  $G_{Jf}$  es el determinante de Gram de  $Jf$ . Entonces, tenemos

$$\det G_{Jf} = \|\partial_1 f \wedge \partial_2 f\|^2$$

Entonces, podemos reescribir la definición del vector normal sobre la forma:

$$\vec{u} \equiv \frac{\partial_1 f \wedge \partial_2 f}{\sqrt{EG - F^2}}$$

y el integral doble para dar el area de un pedazo de superficie como

$$\int \int_U \sqrt{EG - F^2}$$

**Definición**

La primera forma fundamental en un punto de  $S$  es la forma cuadratica asociada a la forma bilineal simetrica obtenida restringiendo el producto escalar de  $E^3(R)$  a la dirección del plano tangente a  $S$  en  $P$ .

La dirección  $\pi_0$  del plano tangente  $\pi$  es el sub-espacio vectorial de  $R^3$  engendrado por  $\partial_{1,2}f$ . En este base, la restricción a  $\pi_0$  del producto escalar de  $E^3(R)$  es representada por la matriz  $G_{Jf}$ .

Si las componentes en la base  $(\partial_1 f, \partial_2 f)$  de un vector tangente son  $(\alpha, \beta)^t$ , el imagen de este vector por la primera forma fundamental es entonces,

$$(\alpha \ \beta)G_{Jf}(u, v) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = E(u, v)\alpha^2 + 2F(u, v)\alpha\beta + G(u, v)\beta^2$$

que vamos a notar

$$I_{(u,v)}(\alpha, \beta).$$

Usualmente notamos esas componentes  $(\alpha, \beta)^t$  como  $(du, dv)^t$  y de omitir los argumentos  $(u, v)$ . Asi la siguiente notación es muy comun:

$$I(du, dv) = Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2$$

Consideramos ahora una segunda representación parametrica de  $S$ :  $\tilde{f} : \tilde{U} \rightarrow R^3$  equivalente a  $f$  via el cambio de parametro  $\varphi$  (es decir que  $f = \tilde{f} \circ \varphi$ ). Sea  $\tilde{E} = (\partial_1 \tilde{f} | \partial_1 \tilde{f})$ ,  $\tilde{F} = \partial_1 \tilde{f} | \partial_2 \tilde{f}$  y  $\tilde{G} = (\partial_2 \tilde{f} | \partial_2 \tilde{f})$  y

$$G_{J\tilde{f}} = \begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix}$$

entonces, tenemos

$$Jf = (J\tilde{f} \circ \varphi).J\varphi$$

Otramente dicho,  $J\varphi$  es la matriz de cambio de base de  $J\tilde{f} \circ \varphi$  hasta  $Jf$ . En consecuencia, las matrices  $G_{Jf}$  y  $G_{J\tilde{f}}$  representando el producto escalar de esas bases son relacionados por

$$G_{Jf} = (J\varphi)^t.(G_{J\tilde{f}} \circ \varphi).J\varphi$$

### 3.7 Curvatura normal (triedro de Darboux, segunda forma fundamental)

Sea  $C$  una sabana regular orientada, representada por  $f : U \rightarrow R^3$  de clase  $C^2$ . Sea  $C$  un arco, trazado sobre  $S$  representado por  $h = f \circ g$  con  $g : I \rightarrow U$  de clase  $C^2$ .

En el capítulo anterior, vimos como hallar la curvatura de  $C$  como arco espacial pero es también importante de estudiar la curvatura de  $C$  como arco trazado sobre  $S$ .

Consideramos de hecho alguien caminando derecho en frente de el, en línea recta. Como el se esta moviendo sobre la tierra que suponemos aquí esférica, su trayectoria no puede ser una línea recta: es en realidad un gran círculo.

Como el movimiento puede aparecer rectilínea? Es que la tierra es tan poco curvada que la asimilamos a su plan tangente en el punto donde estamos. Cuando decimos que nos muevemos en línea recta es que nuestra trayectoria no tiene curvatura en el plano tangente.

Cuando estudiamos un arco trazado sobre una sabana, parece entonces interesante de descomponer su curvatura en una componente en la dirección del plan tangente (su **curvatura geodesica**) y una componente en la dirección de la normal (su **curvatura normal**). Ahora vamos a estudiar esta última.

**Definición**

Si  $C$  es un arco regular de clase  $C^2$  trazado sobre una sabana regular orientada de clase  $C^2$ , la curvatura normal de  $C$  es el producto escalar del vector de curvatura de  $C$  y del vector normal a  $S$ .

Sea  $f$ , una representación paramétrica de  $S$  y  $h = f \circ g$  una representación paramétrica de  $C$ . Así, tenemos

$$\kappa_n \equiv (\vec{k} \circ \sigma | \vec{u} \circ g)$$

donde  $\sigma$  es la abscisa curvilínea:

$$\sigma(t) = \int_{t_0}^t \|h'\|$$

para un tiempo  $t_0$ .

Si cambiamos de orientación de  $S$ , el vector normal cambia de sentido y entonces la curvatura normal cambia de signo.

Como el vector normal es unitario, la proyección ortogonal de  $\vec{k} \circ \sigma$  sobre  $\vec{u} \circ g$  es dada  $\text{proy}_{\vec{u} \circ g} = \kappa_n(\vec{u} \circ g)$ . Además, tenemos

$$\kappa_n = \left\| \vec{k} \circ \sigma \right\| \cdot \left\| \vec{u} \circ g \right\| \cos(\vec{k} \circ \sigma, \vec{u} \circ g) = (\kappa \circ \sigma) \cos \alpha$$

si  $\alpha$  es el ángulo entre  $\vec{k}$  y  $\vec{u}$ . Como esos dos vectores son ortogonales al vector tangente a  $C$ , este ángulo es el complementario (o el opuesto del complementario) del ángulo  $\omega$  entre el plan tangente a  $S$  y el plan osculador de  $C$ . Entonces, tenemos

$$\kappa_n = \pm(\kappa \circ \sigma) \sin \omega$$

En particular si el plan osculador es normal a la superficie, lo que es el caso cuando consideramos una sección normal de la superficie,

$$\kappa_n = \pm(\kappa \circ \sigma)$$

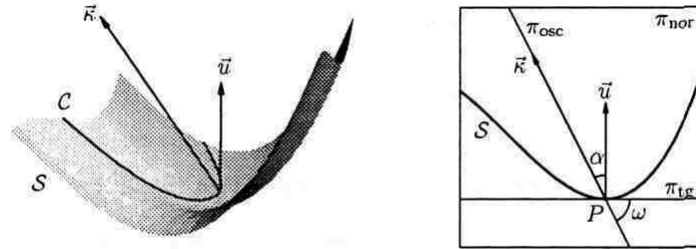


Figura 3.7:

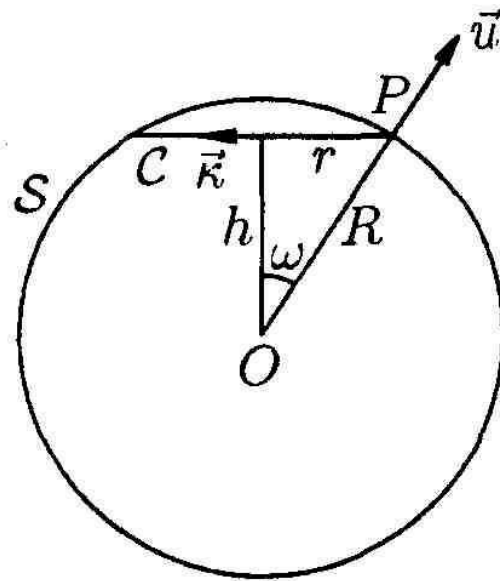


Figura 3.8:

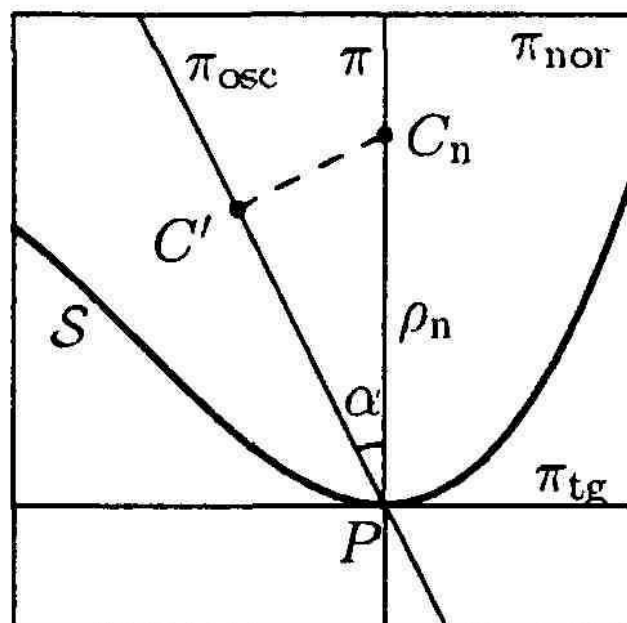


Figura 3.9:

Ejemplo:

Sea la esfera  $S$  de radio  $R$  centrado en  $O$ . Consideramos el círculo  $C$  de intersección de  $S$  y de un plan distante de  $h$  del punto  $O$ . Notamos  $r$  el radio de  $C$ : entonces, por el teorema de Pythagoras, tenemos  $h^2 + r^2 = R^2$ . Además, en cualquier punto de  $C$ , tenemos  $\kappa = 1/r$ . Orientamos  $S$  tomando el vector normal dirigida en dirección exterior. Entonces,  $\sin \omega = r/R$  y  $\kappa_n = -1/R$ : los círculos trazados sobre  $S$  tienen todos la misma curvatura normal.

Consecuencia (teorema de Meusnier):

*El centro de curvatura de un arco trazado sobre una sabana es la proyección sobre el plano osculador del centro de curvatura de la sección normal teniendo la misma tangente de arco.*

**3.7.1 Triedro de Darboux-Ribaucour.**

Un segundo acercamiento posible de la curvatura normal es la siguiente: Nos plazamos en un punto regular  $P$  de un arco  $C$  trazado sobre  $S$ . Suponemos

que  $C$  admite la representación normal  $\bar{h} = f \circ \bar{g}$  donde  $f : U \rightarrow R^3$  es una representación de  $S$  y  $\bar{g} : I \rightarrow U$  son de clase  $C^2$ . Eso significa que para cualquier  $s \in I$ ,

$$I_{\bar{g}(s)}(\bar{g}'_1(s), \bar{g}'_2(s)) = 1.$$

Conocemos en  $P$  el triedro de Frenet  $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$  de  $C$ . Desafortunadamente, si este triedro es perfectamente adaptado al estudio intrínseca de  $C$ , no lo es si vemos  $C$  como arco trazado sobre  $S$ . Mas precisamente, el vector tangente a  $C$  es también un vector tangente a  $S$ , así podemos conservarlo. Pero, en el plano normal a  $C$ ,  $\vec{n}$  y  $\vec{b}$  no tiene ninguna relación con  $S$ . Cambiamos  $\vec{b}$  por  $\vec{u} \circ g$ , el vector normal a  $S$  que es normado y ortogonal a  $\vec{t}$  y después definimos el vector  $\vec{g} = (\vec{u} \circ g) \wedge \vec{t}$  de tal manera que  $(\vec{t}, \vec{g}, \vec{u} \circ g)$  sea una base ortonormal directa, exactamente como el triedro de Frenet. Este base se llama **triedro de Darboux o de Darboux-Ribaucour**.

La donación del vector  $\vec{t}$  que es ortogonal al plano normal a  $C$  lo orienta: el sentido directo es tal que una rotación de  $+\pi/2$  aplica  $\vec{n}$  sobre  $\vec{b}$  (y  $\vec{g}$  sobre  $\vec{u} \circ g$ ). Podemos dar un signo al ángulo  $\omega$ , correspondiendo al sentido de la rotación aplicando  $\vec{n}$  sobre  $\vec{g}$  (y  $\vec{b}$  sobre  $\vec{u} \circ g$ ); así  $\alpha = \omega + \pi/2$  y podemos precisar la relación anterior sobre la curvatura normal:

$$\kappa_n = -\kappa \sin \omega$$

Las formulas de cambio de base entre el triedro de Frenet  $F$  y el triedro de Darboux se escriben:

$$\begin{cases} \vec{t} = & \vec{t} \\ \vec{g} = & \cos \omega \vec{n} + \sin \omega \vec{b} \\ \vec{u} \circ g = & -\sin \omega \vec{n} + \cos \omega \vec{b} \end{cases}$$

O de otra manera,

$$D = F.\Omega$$

donde

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega & -\sin \omega \\ 0 & \sin \omega & \cos \omega \end{pmatrix}$$

Podemos observar que

$$\Omega^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega & \sin \omega \\ 0 & -\sin \omega & \cos \omega \end{pmatrix}$$

Sabemos además que  $F' = F.A$  donde  $A$  es la matriz antisimétrica:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}$$



Queremos encontrar la matriz  $B$  tal que  $D' = D.B$ :

$$\begin{aligned} D' &= (F\Omega)' = F'\Omega + F\Omega' \\ &= FA\Omega + F\Omega' \\ &= F(A\Omega + \Omega') \\ &= D\Omega^{-1}(A\Omega + \Omega') \end{aligned}$$

Entonces, tenemos

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa \cos \omega & \kappa \sin \omega \\ \kappa \cos \omega & 0 & -(\tau + \omega') \\ -\kappa \sin \omega & (\tau + \omega') & 0 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Podemos reconocer la curvatura normal de  $C$  sobre  $S$  en el elemento (3,1) de  $B$ . Los elementos (2,1) y (3,2) son llamados respectivamente **curvatura geodesica** y **torsión geodesica**:

$$\begin{aligned} \kappa_g &\equiv \kappa \cos \omega \\ \tau_g &\equiv (\tau + \omega') \end{aligned}$$

La curvatura geodesica vamos a estudiarla en una proxima sección. La torsión geodesica parece no tener interpretación "geometrica" evidente.

### 3.7.2 Segunda forma fundamental.

Buscamos ahora una expresión analítica para la curvatura normal. Sea como siempre,  $\bar{h} = h \circ \sigma^{-1}$  una representación paramétrica normal de  $C$  donde  $\sigma(t) = \int_{t_0}^t \|h'\|$  es la expresión del abscisa curvilínea al largo de  $C$ , una origen  $h(t_0)$  y una orientación escogida para  $C$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \vec{k} &= \bar{h}'' = (h \circ \sigma^{-1})'' \\ &= \left( (h' \circ \sigma^{-1}) \cdot (\sigma^{-1})' \right)' \\ &= (h'' \circ \sigma^{-1}) \cdot (\sigma^{-1})'^2 + (h' \circ \sigma^{-1}) (\sigma^{-1})'' \end{aligned}$$

El segundo termino es un multiple del vector tangente a  $C$ , entonces, es ortogonal al vector normal  $\vec{u} \circ g \circ \sigma^{-1}$ . Entonces,

$$\begin{aligned}
\kappa_n &= \left( \vec{k} | \vec{u} \circ g \circ \sigma^{-1} \right) \\
&= \left( (h'' \circ \sigma^{-1}) \cdot (\sigma^{-1})'^2 | \vec{u} \circ g \circ \sigma^{-1} \right) \\
&= (\sigma^{-1})'^2 \left( h'' | \vec{u} \circ g \right) \circ \sigma^{-1} \\
&= \frac{1}{(\sigma' \circ \sigma^{-1})^2} \left( h'' | \vec{u} \circ g \right) \circ \sigma^{-1} \\
&= \frac{\left( h'' | \vec{u} \circ g \right)}{\sigma'^2} \circ \sigma^{-1} \\
&= \frac{\left( h'' | \vec{u} \circ g \right)}{\|h'\|^2} \circ \sigma^{-1}
\end{aligned}$$

en función del parametro inicial  $t$ , eso puede reescribir como

$$\begin{aligned}
\kappa_n \circ \sigma &= \frac{\left( h'' | \vec{u} \circ g \right)}{\|h'\|^2} \\
&= \frac{\left( (f \circ g)'' | \vec{u} \circ g \right)}{\| (f \circ g)' \|^2}
\end{aligned}$$

Usando el resultado de la subsección anterior, el denominador de esta fracción vale

$$I_{g(-)}(g'_1, g'_2)$$

Ademos, como tenemos

$$(f \circ g)' = (\partial_1 f \circ g) \cdot g'_1 + (\partial_2 f \circ g) \cdot g'_2$$

podemos deducir que

$$\begin{aligned}
(f \circ g)'' &= (\partial_1^2 f \circ g) \cdot g_1'^2 + 2(\partial_1 \partial_2 f \circ g) \cdot g'_1 \cdot g'_2 + (\partial_2^2 f \circ g) \cdot g_2'^2 + \\
&\quad (\partial_1 f \circ g) \cdot g_1'' + (\partial_2 f \circ g) \cdot g_2''
\end{aligned}$$

Como los dos ultimos terminos son paralelos al plano tangente, tenemos

$$\left( (f \circ g)'' | \vec{u} \circ g \right) = (L \circ g) \cdot g_1'^2 + 2(M \circ g) \cdot g'_1 \cdot g'_2 + (N \circ g) \cdot g_2'^2$$

donde introducimos las abreviaciones clasicas  $L, M$  y  $N$  definidos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
L &\equiv (\partial_1^2 f | \vec{u}) \\
M &\equiv (\partial_1 \partial_2 f | \vec{u}) \\
N &\equiv (\partial_2^2 f | \vec{u})
\end{aligned}$$

A notar que como  $(\partial_1 f | \vec{u}) = 0$ , tenemos

$$(\partial_1^2 f | \vec{u}) + (\partial_1 f | \partial_1 \vec{u}) = \partial_1((\partial_1 f | \vec{u})) = 0$$

lo que nos da otra expresión para  $L$ :

$$\begin{aligned} L &= -(\partial_1 f | \partial_1 \vec{u}) \\ M &= -(\partial_1 f | \partial_2 \vec{u}) = -(\partial_2 f | \partial_1 \vec{u}) \\ N &= -(\partial_2 f | \partial_2 \vec{u}) \end{aligned}$$

Esas 4 igualdades son conocidas como **formulas de Weingarten**.

Introducimos la segunda forma fundamental:

$$II_{(u,v)}(a, b) = L(u, v)a^2 + 2M(u, v)ab + N(u, v)b^2$$

o de manera mas tradicional

$$II_{(u,v)}(du, dv) = L(u, v)du^2 + 2M(u, v)du \cdot dv + N(u, v)dv^2$$

Y finalmente tenemos,

$$\kappa_n \circ \sigma = \frac{II_{g(-)}(g'_1, g'_2)}{I_{g(-)}(g'_1, g'_2)}$$

En particular, en un punto  $P = f(g(t_0))$  con  $g(t_0) = (u_0, v_0)$  y  $s_0 = \sigma(t_0)$ :

$$\kappa_n(s_0) = \frac{II_{(u_0, v_0)}(g'_1(t_0), g'_2(t_0))}{I_{(u_0, v_0)}(g'_1(t_0), g'_2(t_0))}$$

Sea  $C^*$  un otra curva trazada sobre  $S$  pasando por  $P$  y tal que la tangente en este punto coincide con la tangente de  $C$ . Asi  $C^*$  es representado por  $h^* = f \circ g^*$  con  $g^*(t_0^*) = (u_0, v_0)$  y decir que  $C^*$  y  $C$  tienen la misma tangente en el punto  $P$ , es decir que los vectores  $(g'_1(t_0), g'_2(t_0))$  y  $(g_1^{*'}(t_0^*), g_2^{*'}(t_0^*))$  son paralelos: entonces existe  $k$  tal que

$$(g'_1(t_0), g'_2(t_0)) = k \cdot (g_1^{*'}(t_0^*), g_2^{*'}(t_0^*))$$

Es facil de hallar la curvatura normal de  $C^*$  en  $P$  y obtenemos el resultado:

$$\kappa_n^*(s_0^*) = \kappa_n(s_0)$$

Asi dos arcos trazados sobre una misma superficie con un punto comun y en este punto la misma tangente, tienen la misma curvatura normal. O para decirlo de manera diferente, la curvatura normal es un punto no depende de la curvatura trazada sobre la superficie pero solamente de su dirección. Entonces, podemos expresar la siguiente definición:

**Definición**

Sea  $S$  una sabana orientada, regular, de clase  $C^2$  y  $P$  un punto de  $S$ . La curvatura normal de  $S$  en  $P$  en la dirección del vector tangente  $w$  es la curvatura normal en  $P$  de cualquier curva regular de clase  $C^2$  trazada sobre  $S$ , con tangente en  $P$  paralela a  $w$ .

Su expresión es

$$\kappa_n(w) = \frac{II_{(u_0, v_0)}(a, b)}{I_{(u_0, v_0)}(a, b)}$$

donde  $(u_0, v_0)$  son las coordenadas curvilíneas de  $P$  y  $(a, b)$  son las componentes de  $w$  en la base de las derivadas parciales.

De todos las curvas trazadas sobre  $S$ , pasando por  $P$  y tangentes al vector  $w$ , podemos usar en particular la sección  $C_w$  de  $S$  por el plano (normal)  $\Pi_w$  pasando por  $P$  y paralelo a los vectores  $\vec{u}$  y  $w$ . Como es una curva plana contenida en  $\Pi_w$ , su plano osculator es  $\Pi_w$  mismo y el ángulo  $\omega$  entre este plano osculator y el plano tangente a  $S$  en  $P$  es  $\omega = \pi/2$ .

Entonces, la curvatura normal de  $S$  en la dirección  $w$  es la curvatura de  $C_w$  en  $P$  (o su opuesto dependiendo de la orientación escogida por  $S$ ). La curva  $C_w$  sección de  $S$  por un plano normal es llamado **sección normal**.

### 3.7.3 Curvas asintóticas.

#### Definición:

Sea  $S$  una superficie regular de clase  $C^2$  y  $C$  una curva trazada sobre  $S$ . Vamos a decir que  $C$  es una curva asintótica de  $S$  si su curvatura normal es nula en todos sus puntos. Una dirección asintótica es una dirección en el plano tangente en cual la curvatura es nula.

#### Ejemplos:

1. Si una superficie contiene una línea recta, la curvatura de este es cero, su curvatura lo es también. Entonces, esta línea recta es una curva asintótica de la superficie. Por ejemplo, sobre las cuerdas doblemente arreglada como hiperboloïda a una sabana o paraboloida hiperbolica, en cada punto, tienen dos direcciones asintóticas que son las de los dos generadoras.
2. Consideramos la "helicoidal" representada por:

$$f : R^2 \rightarrow R^3 : (u, v) \rightarrow (u \cos v, u \sin v, v)$$

Cada curva  $u = u_0$  es una helice circular (degenerada en una derecha si  $u_0 = 0$ ) y su dirección, en el plano tangente es  $\partial_2 f$ , con componentes en la base  $Jf(0, 1)$ . La curvatura normal de tal helice sobre el helicoidal es entonces:

$$\kappa_n(0, 1) = \frac{II(0, 1)}{I(0, 1)} = \frac{N}{G}$$

Pero tenemos,

$$\begin{aligned} \partial_1 f(u, v) &= (\cos v, \sin v, 0) \\ \partial_2 f(u, v) &= (-u \sin v, u \cos v, 1) \\ \partial_2^2 f(u, v) &= (-u \cos v, -u \sin v, 0) \end{aligned}$$

Como  $\partial_2^2 f(u, v)$  es paralelo a  $\partial_1 f(u, v)$ , tenemos  $\partial_2^2 f(u, v) \perp \vec{u}$  y entonces  $N = 0$  y  $\kappa_n(0, 1) = 0$ . Las helices  $u = \text{constante}$  son las curvas asintóticas sobre la "helicoidal". También las curvas  $v = \text{cte}$  como son líneas rectas son curvas asintóticas sobre la "helicoidal".

## 3.8 Direcciones principales

### 3.8.1 Puntos ombilicales

La última presentación de la curvatura normal nos enseña muy claramente que en un punto de la esfera de radio  $R$ , la curvatura normal vale  $1/R$  en todas las direcciones. Introducimos un nombre para tal tipo de punto:

**Definición:**

*Un punto de una sabana regular de clase  $C^2$  en cual la curvatura normal es independiente de las direcciones posibles es llamado un punto ombilical.*

**Lema:**

Sea dos polinomios homogéneos de grado  $n$  en  $R[X, Y]$

$$P = \sum_{k=0}^n p_k X^k Y^{n-k}$$

$$Q = \sum_{k=0}^n q_k X^k Y^{n-k}$$

el segundo no-cero. Las siguientes relaciones son equivalentes:

1. la función de  $R^2$  en  $R$  definida por  $F(x, y) = P(x, y)/Q(x, y)$  es una constante
2. la función de  $R$  en  $R$  definida por  $f(x) = P(x, 1)/Q(x, 1)$  es constante.
3. Existe  $r \in R$  tal que  $P = r \cdot Q$
4. Existe  $r \in R$  tal que para cualquier  $k \in \{0, \dots, n\}$ ,  $p_k = r q_k$ .

**Proposición:**

*Un punto de sabana  $S$ , regular y de clase  $C^2$  es ombilical si y solamente si en este punto, las dos formas fundamentales son proporcionales, es decir*

$$F \neq 0, \frac{L}{E} = \frac{M}{F} = \frac{N}{G}$$

o

$$F = M = 0, \frac{L}{E} = \frac{N}{G}$$

Usando el lema anterior, este resultado es inmediato.

### 3.8.2 Direcciones y curvaturas principales

En general, en un punto de la superficie, la curvatura normal no es igual en todas las direcciones:

Ejemplos:

Consideramos la elipsoide  $A$  :

$$A \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

En el punto  $P = (0, 0, c)$  el plan tangente a  $A$  es el plano horizontal  $z = c$  y

- en la dirección paralela a  $Ox$ , la sección normal al elipsoide es la elipsa de ecuación

$$\begin{cases} y = 0 \\ x^2/a^2 + z^2/c^2 = 1 \end{cases}$$

y su curvatura en  $P$  vale  $c/a^2$ .

- en la dirección paralela a  $Oy$ , la sección normal de elipsoide es la elipsa de ecuación:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1 \end{cases}$$

y su curvatura en  $P$  vale  $c/b^2$ .

Esas dos curvaturas son iguales solamente si  $a = b$ , es decir si la elipsoide es una de revolución.

**Definición:**

Una dirección en cual la curvatura normal es extremal es llamada *dirección principal*: la curvatura normal correspondiente es llamada *curvatura principal*.

Así, un punto umbilical es un punto donde toda dirección es principal. En un otro punto, hay siempre dos direcciones principales y son ortogonales.

Lema:

Sea  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , no todos nulos. Si  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$  son dos soluciones no-proporcionales de la ecuación:

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 0$$

entonces los triplets  $(y_1y_2, -(x_1y_2 + x_2y_1), x_1x_2)$  y  $(a, b, c)$  son proporcionales.

Demostración:

indicación: estudiar dos casos,  $a \neq 0$  y  $a = 0$ . Poner  $z = x/y$  y resolver la ecuación de segundo grado en  $z$ .

**Teorema:**

Sea  $P$  un punto no-umbilical de una sabana  $S$ , regular y de clase  $C^2$ . En el plano tangente a  $S$  en  $P$ , existe una y una sola dirección en cual la curvatura normal es maximal, y una y una sola dirección en cual la curvatura normal es minimal. Además esas dos direcciones son ortogonales.

Para encontrar las direcciones principales  $(a, b)$  es suficiente de resolver las ecuaciones

$$\partial_1 \kappa_n(a, b) = \partial_2 \kappa_n(a, b) = 0$$

Usando la definición de la curvatura normal en termino de las dos primeros formas fundamentales, eso no da un sistema de ecuaciones. Para que este sistema de ecuaciones tienen soluciones, los parametros del sistema tienen que satisfacer la siguiente condición:

$$\begin{aligned} & (L - \kappa_n E) \cdot (N - \kappa_n G) - (M - \kappa_n F)^2 = 0 \\ \Rightarrow & \kappa_n^2 (EG - F^2) - \kappa_n (GL - 2FM + EN) + LN - M^2 = 0 \end{aligned}$$

Esta ecuación es conocida como **la ecuación a las curvaturas principales o ecuación a las direcciones principales**.

Este teorema es sorprendente. Para empezar, la "silla de montar del mono" de ecuación  $z = x(x^2 - 3y^2)$  no nos da un contra-ejemplo? No es el caso porque todas las cubicas obtenidas como sección de la superficie por un plano conteniendo el eje  $Oz$  tienen una curvatura nula en el origen. Entonces, el origen es un punto umbilical de la "silla de montar del mono". De hecho, es un punto planar si usamos la terminología que vamos a introducir en la proxima sección.

Despues, podemos hacer la siguiente construcción. Sea, en el plano  $z = 1$ , una curva  $C$  cerrada sencilla presentando 4 petalo alargados al largo de los ejes de coordenadas. Por ejemplo, la curva de ecuación polar  $r = 2 - \sin^2 2\theta$  estaria buena para el papel de  $C$ . Formamos la superficie  $S$  reunión de todas las parabolas de eje  $Oz$  y de vertice el origen apoyandose sobre la curva  $C$ .

Parece evidente que  $S$  tiene que tener una curvatura minimal en las direcciones de los dos ejes  $Ox$  y  $Oy$  y una curvatura normal maximal en las direcciones de los dos bissectrices de los ejes. Pero eso es prohibido por el teorema anterior. Donde nos equivocamos?

Si buscamos una representación paramétrica de  $S$ , podemos escoger, por ejemplo, la función

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : \begin{cases} (u, v) \rightarrow (u, v, \frac{(u^2+v^2)^5}{4(u^4+v^4)^2}) & (u, v) \neq (0, 0) \\ (0, 0) \rightarrow (0, 0, 0) \end{cases}$$

que desafortunadamente no es de clase  $C^2$ .

Sea  $S$  una sabana regular y de clase  $C^2$  y sea  $P$  uno de esos puntos. Convenemos de notar  $w_1$  y  $w_2$  dos vectores unitarios en las direcciones principales. Podemos además suponer que  $(w_1, w_2, \vec{u})$  es una base ortonormal directa. Y sea  $\kappa_{1,2}$  las respectivas curvatura principales correspondiente. Si  $P$  es un punto umbilical, tomamos por  $w_1$  un vector tangente unitario y  $w_2 = \vec{u} \wedge w_1$ .

**Teorema de Euler:**

Sea  $w$  un vector tangente unitario a  $S$  en  $P$ . Si el ángulo de los vectores  $w$  y  $w_1$  es  $\varphi$ , entonces la curvatura normal de  $S$  en la dirección de  $w$  es

$$\kappa_n(w) = \cos^2 \varphi \cdot \kappa_1 + \sin^2 \varphi \cdot \kappa_2$$

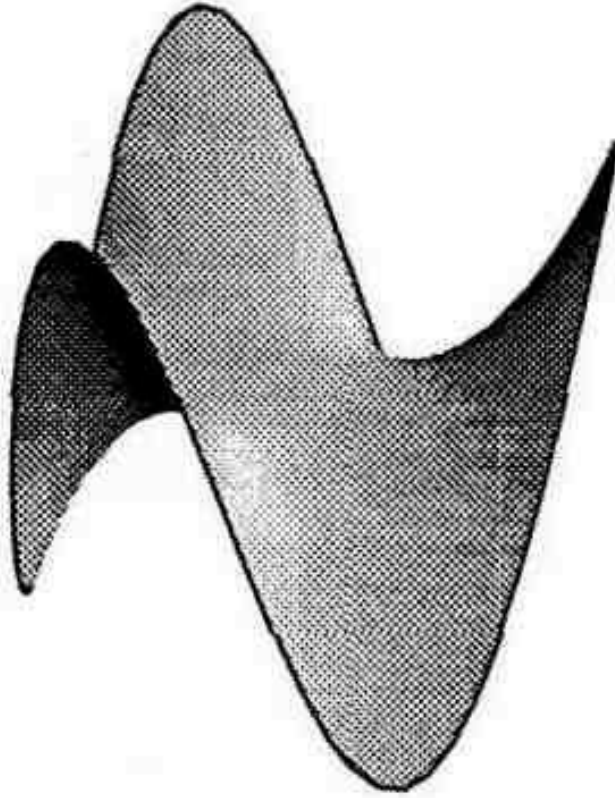


Figura 3.10:

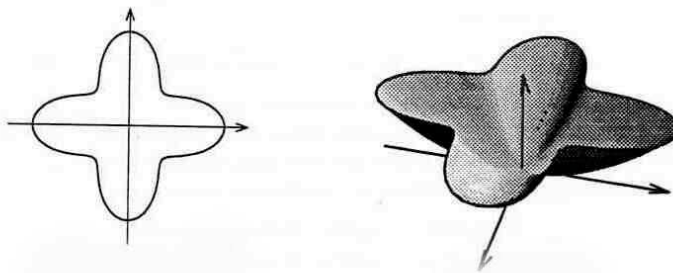


Figura 3.11:



### 3.9 Clasificaciones de los puntos de una superficie

Sea  $S$  una sabana regular de clase  $C^2$ ; en cada de sus puntos, notamos  $\kappa_1 \leq \kappa_2$  las curvaturas principales. Así un punto es umbilical si y solamente si en este punto  $\kappa_1 = \kappa_2$ .

**Definición**

Sea  $P$  un punto de sabana regular de clase  $C^2$

- Si, en  $P$ , las curvaturas principales son no-ceros y de mismo signo (es decir  $\kappa_1 \cdot \kappa_2 > 0$ ),  $P$  es dicho elíptico.
- Si, en  $P$ , las curvaturas principales son no-ceros y de signo opuesto (es decir  $\kappa_1 \cdot \kappa_2 < 0$ ),  $P$  es dicho hiperbólico.
- Si, en  $P$ , al menos una de las curvaturas principales es nula (es decir  $\kappa_1 \cdot \kappa_2 = 0$ ),  $P$  es dicho parabólico.
- Si, en  $P$ , las curvaturas principales son ceros (es decir  $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$ ),  $P$  es dicho planar.

Un punto es entonces elíptico si en este punto no hay dirección asintótica y es hiperbólico si hay dos direcciones asintóticas. En un punto parabólico no planar, hay solamente una. Y en un plano planar, todas las direcciones son asintóticas.

En un punto elíptico, como la curvatura no cambia de signo, todas las secciones normales de la sabana tienen su concavidad en el mismo sentido. Entonces, en la vecindad de tal punto, la sabana es completamente situada de un lado al plano tangente. En un punto hiperbólico, la sabana atraviesa el plano tangente. Mas precisamente, la intersección de la sabana y de su plano tangente es una curva que admite como tangentes en  $P$  las dos líneas rectas, en el plano tangente, por las direcciones asintóticas. En un punto parabólico, los dos situaciones son posibles.

Ejemplos:

1. Todo punto umbilical es elíptico (es el caso de todos los puntos de una esfera) o planar (caso de un plano).
2. Por cualquier punto de una parabolóida hiperbólica pasen parábolas situadas de los dos lados del plano tangente; esas parábolas tienen curvaturas normales de signos opuestos. Entonces, cada punto de un parabolóida hiperbólica es hiperbólico.
3. En un punto de un cilindro, la dirección de la generadora es una dirección asintótica: en todas las otras direcciones, la curvatura normal es de mismo signo. Entonces, todos los puntos de un cilindro son parabólicos.

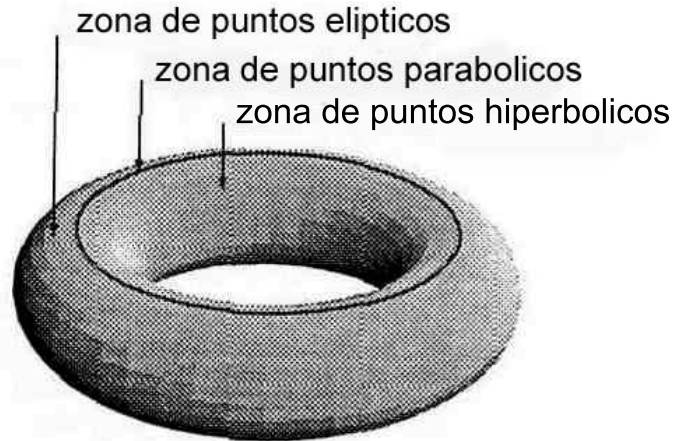


Figura 3.12:

4. Sobre el toro, la paralela inferior y la paralela superior son las líneas de puntos parabolicos. Comparten el toro en una zona externa donde los puntos son elipticos y una zona "interna" donde los puntos son hiperbolicos.
5. Consideramos dos sabanas:

$$S_{\pm} \equiv z = x^2 \pm y^2$$

Al origen, el plano tangente es  $Oxy$  y los dos direcciones principales son las direcciones de los ejes  $Ox$  y  $Oy$ . La sección normal por el plano  $Oxz$  es, en este ultimo, la parabola de ecuación  $z = x^2$  y su curvatura en el vertice vale 2. La sección normal por el plano  $Oyz$  es en este plano, la cuartica  $z = \pm y^4$  de curvatura en su vertice igual a cero. Si la orientación escogida es tal que el vector normal es dirigido por arriba, los dos curvaturas principales, al origen, son entonces,  $\kappa_1 = 2$  y  $\kappa_2 = 0$ : este punto es parabolico. Pero  $S_+$  es completamente situado en el semi-espacio superior y  $S_-$  travesarse el plano  $Oxy$ .

### 3.9.1 La indicadora de Dupin.

Si  $w$  es un vector tangente unitario a una sabana  $S$  en un punto  $P$ , tal que su dirección no es asintotica, definimos el radio de curvatura normal correspondiente

como

$$\rho_n(w) \equiv \frac{1}{|\kappa_n(w)|}$$

Procedamos a la siguiente construcción: reportamos en cada dirección no-asintótica del plano tangente, una longitud igual a la raíz cuadrada del radio de curvatura normal. En otras palabras, asociamos el punto

$$Q(w) \equiv P + \sqrt{\rho_n(w)}w$$

a cada vector tangente unitario  $w$ . El lugar de este punto  $Q(w)$  es llamado la indicadora de Dupin de  $S$  en  $P$ .

Como la indicadora de Dupin concretiza geoméricamente la información sobre todas las curvaturas normales de la sabana en un punto, ella informa sobre la forma de la curvatura en la vecindad del punto.

Proposición:

*Sea  $P$  un punto de una sabana de clase  $C^2$ . La indicadora de Dupin en  $P$*

1. *es un círculo si y solamente si  $P$  es un punto umbilical no-planar.*
2. *es una elipse si y solamente si  $P$  es un punto elíptico.*
3. *es la reunión de dos hipérbolas de misma asíntotes si y solamente si  $P$  es un punto hiperbólico.*
4. *es la reunión de dos líneas rectas paralelas si y solamente si  $P$  es un punto parabólico no-planar.*
5. *es el vacío si y solamente si  $P$  es un plano planar.*

Demostración:

Del teorema de Euler, podemos deducir una ecuación polar de la indicadora de Dupin en la referencia ortonormal  $\mathcal{R} \equiv (P; w_1, w_2)$  del plano tangente:

$$r = \frac{1}{\sqrt{|\cos^2 \varphi \cdot \kappa_1 + \sin^2 \varphi \cdot \kappa_2|}}$$

Si  $\kappa_{1,2} = 0$ , el denominador es siempre cero, lo que prueba el punto (5) del teorema.

En los otros casos, ponemos la ecuación sobre la forma:

$$r^2 \cdot |\cos^2 \varphi \cdot \kappa_1 + \sin^2 \varphi \cdot \kappa_2| = 1$$

lo que es equivalente en coordenadas cartesianas:

$$x^2 \kappa_1 + y^2 \kappa_2 = \pm 1$$

- si  $\kappa_{1,2} \neq 0$ , esta ecuación describe un elipse.

- si  $\kappa_{1,2}$  son no-cero y de signo opuesto, tenemos la ecuación de una hipérbola y sus asíntotas son las derechas  $\sqrt{|\kappa_1|}x = \pm\sqrt{|\kappa_2|}y$ .
- si una de los dos curvaturas es nula, la ecuación se reduce a  $x = \pm 1/\sqrt{|\kappa_1|}$ , es decir que describo la reunión de dos líneas rectas paralelas a la dirección asíntotica.

Pero la indicadora de Dupin es todavía más rica en contenido geométrico que la descripción anterior deja adivinar. De hecho, es posible de dar una construcción totalmente diferente.

Sea  $\epsilon > 0$ . Consideramos la curva de intersección de  $S$  y de la reunión de dos planos paralelos al plano tangente en  $P$  distantes de  $\epsilon$ . Sea  $D_\epsilon$  el imagen de esta curva de intersección por la homotetia de centro  $P$  y de razón  $1/\sqrt{2\epsilon}$ . La indicadora de Dupin es el límite de la curva  $D_\epsilon$  cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ . Vamos a justificarlo.

Por eso, vamos a usar la representación paramétrica  $f : U \rightarrow R^3$  de  $S$  y su expansión en serie de Taylor de orden dos alrededor del punto  $(u_0, v_0) \in U$  tal que  $f(u_0, v_0) = P$ .

$$\begin{aligned} f(u, v) &\simeq f(u_0, v_0) + (u - u_0)\partial_1 f(u_0, v_0) + (v - v_0)\partial_2 f(u_0, v_0) + \\ &\quad \frac{1}{2} \left( (u - u_0)^2 \partial_1^2 f(u_0, v_0) + 2(u - u_0)(v - v_0)\partial_1 \partial_2 f(u_0, v_0) + \right. \\ &\quad \left. (v - v_0)^2 \partial_2^2 f(u_0, v_0) \right) \end{aligned}$$

Trabajamos en la referencia  $\mathcal{R} \equiv (P, \partial_1 f(u_0, v_0), \partial_2 f(u_0, v_0), \vec{u}(u_0, v_0))$  y notamos  $(a, b, c)$  sus coordenadas. Esta referencia no es ortonormal pero el tercer vector de base es unitario y ortogonal a los dos otros. Limitandonos a los términos dominantes, la sabana  $S$  es entonces determinada por los ecuaciones paramétricas  $a \simeq (u - u_0)$  y  $b \simeq (v - v_0)$  y

$$\begin{aligned} c &\simeq \left( \vec{u}(u_0, v_0) \left| \begin{array}{l} (u - u_0)\partial_1 f(u_0, v_0) + (v - v_0)\partial_2 f(u_0, v_0) + \\ \frac{1}{2} \left( (u - u_0)^2 \partial_1^2 f(u_0, v_0) + \right. \\ \left. + 2(u - u_0)(v - v_0)\partial_1 \partial_2 f(u_0, v_0) + \right. \\ \left. (v - v_0)^2 \partial_2^2 f(u_0, v_0) \right) \end{array} \right. \right) \\ &= \left( \vec{u}(u_0, v_0) \left| \begin{array}{l} \frac{1}{2} \left( (u - u_0)^2 \partial_1^2 f(u_0, v_0) + \right. \\ \left. + 2(u - u_0)(v - v_0)\partial_1 \partial_2 f(u_0, v_0) + \right. \\ \left. (v - v_0)^2 \partial_2^2 f(u_0, v_0) \right) \end{array} \right. \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( (u - u_0)^2 L + 2(u - u_0)(v - v_0)M + (v - v_0)^2 N \right) \end{aligned}$$

Los dos planos tienen como ecuaciones  $c = \pm\epsilon$ . Entonces, la aproximación de segundo orden de la intersección tiene como ecuaciones:

$$\begin{cases} a^2 L + 2abM + b^2 N = 2c \\ c = \pm\epsilon \end{cases}$$

o

$$\begin{cases} a^2 L + 2abM + b^2 N = \pm 2\epsilon \\ c = \pm\epsilon \end{cases}$$

Su imagen por homotetia de centro P y de razon  $1/\sqrt{2\epsilon}$  es entonces

$$\begin{cases} a^2L + 2abM + b^2N = \pm 1 \\ c = \pm\sqrt{\epsilon/2} \end{cases}$$

el limite de esta ultima, para  $\epsilon \rightarrow 0$  es entonces

$$\begin{cases} a^2L + 2abM + b^2N = \pm 1 \\ c = 0 \end{cases}$$

Pero

$$a^2L + 2abM + b^2N = \kappa_n(a, b) (a^2E + 2abF + b^2G)$$

Asi la ecuación  $a^2L + 2abM + b^2N = \pm 1$  se rescribo

$$(a^2E + 2abF + b^2G) = \pm \frac{1}{\kappa_n(a, b)}$$

Como el miembro de izquierda representa el cuadrado de la distancia del origen al punto de coordenadas  $(a, b, 0)$  y que el valor absoluta del miembro de derecha es el radio de curvatura normal en la dirección  $(a, b)$ , encontramos bien la primera construcción de la indicadora de Dupin.

### 3.10 Curvatura total

Introducimos todavia la noción siguiente que resume en un solo nombre una parte de la información de una superficie en un punto.

**Definición:**

la curvatura total o curvatura de Gauss de  $S$  en  $P$  es el producto  $\kappa_\tau \equiv \kappa_1 \cdot \kappa_2$

**Ejemplo:**

Como en cada punto de una esfera de radio  $R$  la curvatura normal vale  $1/R$  en todas las direcciones,  $\kappa_1 = \kappa_2 = 1/R$  y  $\kappa_\tau = 1/R^2$ .

De la definición, resulta inmediatamente que

**Proposición:**

El punto  $P$  es

- *eliptico si y solamente si  $\kappa_\tau > 0$*
- *parabolica si y solamente si  $\kappa_\tau = 0$*
- *hiperbolica si y solamente si  $\kappa_\tau < 0$*

Ademas, tenemos la proposición siguiente:

**Proposición:**

La curvatura total se expresa por

$$\kappa_\tau = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

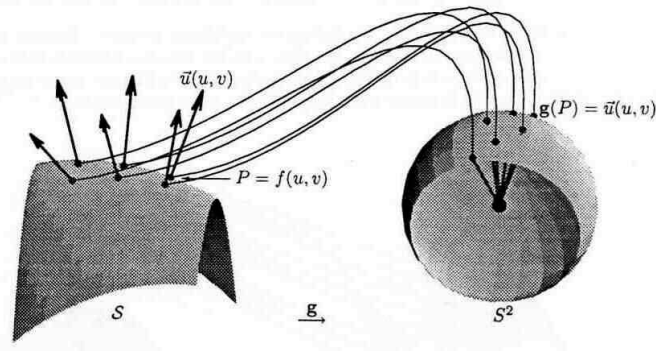


Figura 3.13: Aplicación de Gauss

(demostración evidente usando la ecuación a curvaturas principales)

Consecuencia:

*El punto  $P$  es*

- *elíptico si y solamente si  $LN - M^2 > 0$*
- *parabólica si y solamente si  $LN - M^2 = 0$*
- *hiperbólica si y solamente si  $LN - M^2 < 0$*

### 3.10.1 La aplicación de Gauss

La curvatura total admite la interpretación geométrica siguiente.

Sea  $S$  una sabana regular. En cada punto  $P$  de  $S$  existe un vector normal  $\vec{u}$ , este vector normal es unitario y entonces, determina un punto  $g(P) \equiv O + \vec{u}$  de la esfera-unidad  $S^2$ . Eso nos define una aplicación:

$$g : S \rightarrow S^2$$

llamada **aplicación de Gauss**.

Ejemplos:

1. Si  $S$  es un pedazo de un plano  $\mathbb{R}^2$ , determinamos la orientación de  $\mathbb{R}^2$  usando un vector normal unitario  $n$ . Entonces, si la orientación de  $S$  fue judiciosamente escogida,  $\vec{u}(u, v) = n$  en cualquier punto de  $S$  (si es la otra orientación de  $S$  que fue escogida, tenemos  $\vec{u}(u, v) = -n$ ). La aplicación de Gauss es entonces la aplicación constante:

$$g : S \rightarrow S^2 : P \rightarrow O + n$$

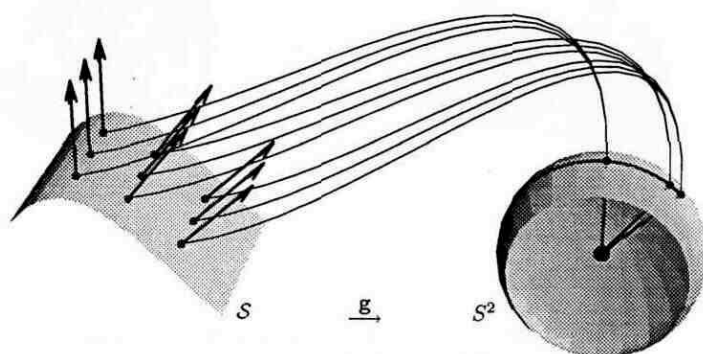


Figura 3.14:

2. en el caso de la esfera de radio  $R$ , la aplicación de Gauss es sencillamente una homotetia de razón  $1/R$ .

Sea  $P$  un punto de  $S$ , consideramos un dominio  $D$  de  $S$ , conteniendo  $P$ , y sea  $g(D) \subseteq S^2$  el imagen de  $D$  por  $g$ . Entonces,

$$|\kappa_\tau(P)| = \lim_{D \rightarrow \{P\}} \frac{A(g(D))}{A(D)} \quad (3.3)$$

el limite es tomada cuando el diametro de  $D$  va a tender a cero sin que su area se anula. Además,  $\kappa_\tau(P)$  es positivo (resp. negativo) si en la vecindad de  $P$  la aplicación de Gauss preserva (o invierte) la orientación.

#### Ejemplos:

1. hay un caso donde el resultado es evidente: cuando  $S$  es un pedazo de plano, como en este caso,  $A(g(D)) = A(\{O + n\}) = 0$  para cualquier  $D$ .
2. En un otro caso, el resultado es también evidente: cuando  $S$  es una superficie cilindrica. De hecho, todos los vectores normales son entonces ortogonales a la dirección de las generadoras y el imagen por  $g$  de cualquier parte de la superficie cilindrica es un arco de gran circulo sobre  $S^2$  de area nula.
3. En el caso que  $S$  sea una esfera de radio  $R$ , la aplicación de Gauss es una homotetia de razón  $1/R$  cualquier sea  $D \subseteq S$ :

$$A(g(D)) = \frac{1}{R^2} A(D)$$

lo que nos da que

$$|\kappa_\tau(P)| = 1/R^2$$

Vamos a dar ahora una demostración no-exhaustiva de la relación (3.3).

Ponemos

$$l \equiv \lim_{D \rightarrow \{P\}} \frac{A(g(D))}{A(D)}$$

En el objetivo de hallar este limite, vamos a darnos una representación paramétrica  $f : U \rightarrow R^3$  de  $S$  y notamos  $(u_0, v_0)$  las coordenadas curvilineas de  $P$  y definimos  $\Delta = f^{-1}(D)$ . Entonces,  $\vec{u} : U \rightarrow R^3$  es una representación paramétrica de  $S^2$  (o al menos de  $g(S)$ ) en cual  $\Delta = \vec{u}^{-1}(g(D))$ . Notamos como siempre,  $E, F$  y  $G$  los coeficientes de la primera forma fundamental de  $f$ ;  $E^*, F^*$  y  $G^*$  los coeficientes de la primera forma fundamental de  $\vec{u}$ . Entonces,

$$A(D) = \int \int_{\Delta} \sqrt{EG - F^2}$$

Usando el teorema de la mediana, existe  $(u_1, v_1) \in \Delta$  tal que

$$\int \int_{\Delta} \sqrt{EG - F^2} = A(\Delta) \sqrt{E_1 G_1 - F_1^2}$$

donde notamos  $E_1 = E(u_1, v_1)$ , etc... De la misma manera, existe  $(u_2, v_2) \in \Delta$  tal que

$$A(g(D)) = \int \int_{\Delta} \sqrt{E^* G^* - F^{*2}} = A(\Delta) \sqrt{E_2^* G_2^* - F_2^{*2}}$$

Asi tenemos

$$l = \lim_{\Delta \rightarrow \{(u_0, v_0)\}} \frac{\sqrt{E_2^* G_2^* - F_2^{*2}}}{\sqrt{E_1 G_1 - F_1^2}}$$

Pero si  $\Delta \rightarrow \{(u_0, v_0)\}$ , los puntos  $(u_1, v_1)$  y  $(u_2, v_2)$  van a tender al punto  $(u_0, v_0)$  y por continuidad de los coeficientes de la primera forma fundamental, tenemos

$$l = \sqrt{\frac{E_0^* G_0^* - F_0^{*2}}{E_0 G_0 - F_0^2}}$$

Nos queda a evaluar esos coeficientes. Pero, las formulas de Weingarten nos dicen que

$$\begin{aligned} L &= -(\partial_1 f | \partial_1 \vec{u}) \\ M &= -(\partial_1 f | \partial_2 \vec{u}) = -(\partial_2 f | \partial_1 \vec{u}) \\ N &= -(\partial_2 f | \partial_2 \vec{u}) \end{aligned}$$

Eso significa que la columna de las coordenadas covariantes de  $\partial_1 \vec{u}$  en la base  $Jf$  es

$${}^{Jf} \partial_1 \vec{u} = \begin{pmatrix} -L \\ -M \end{pmatrix}$$

La matriz del producto escalar en la base  $Jf$  es

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$



y su inverso es

$$\frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}$$

Entonces, las coordenadas de  $\partial_1 \vec{u}$  en  $Jf$  son

$$\begin{aligned} Jf \partial_1 \vec{u} &= \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -L \\ -M \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} FM - GL \\ FL - EM \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Igual para  $\partial_2 \vec{u}$ , tenemos

$$Jf \partial_2 \vec{u} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} FN - GM \\ FM - EN \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} E^* &= (\partial_1 \vec{u} | \partial_1 \vec{u}) \\ &= \frac{1}{(EG - F^2)^2} (FN - GM \quad FM - EN) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} FM - GL \\ FL - EM \end{pmatrix} \\ &= \frac{EM^2 - 2FLM + GL^2}{EG - F^2} \end{aligned}$$

De misma manera obtenemos

$$\begin{aligned} F^* &= \frac{EMN - F(LN + M^2) + GLM}{EG - F^2} \\ G^* &= \frac{EN^2 - 2FMN + GM^2}{EG - F^2} \end{aligned}$$

Entonces,

$$E^*G^* - F^{*2} = \frac{(LN - M^2)^2}{EG - F^2}$$

de tal manera que obtenemos finalmente

$$\begin{aligned} l &= \sqrt{\frac{E_0^*G_0^* - F_0^{*2}}{E_0G_0 - F_0^2}} \\ &= \frac{|L_0N_0 - M_0^2|}{E_0G_0 - F_0^2} \\ &= |\kappa_\tau(P)| \end{aligned}$$

### 3.11 Curvatura geodesica

La curvatura geodesica de un arco trazado sobre una sabana es la componente de la curvatura del arco en el plano tangente a la sabana.

**Definición:**

Sea  $C$  un arco regular orientado de clase  $C^2$  trazado sobre una sabana regular de clase  $C^2$ . La curvatura geodesica de  $C$  sobre  $S$  es el producto mixto del vector curvatura de  $C$ , del vector normal a  $S$  y del vector tangente a  $C$ .

Si como usualmente, notamos  $f : U \rightarrow R^3$  una representación paramétrica de la sabana y  $h = f \circ g$  con  $g : I \rightarrow U$  una representación del arco:

$$\kappa_g \equiv [\vec{k}, \vec{u} \circ g, \vec{t}]$$

Actuando así damos un signo a la curvatura geodesica: es positiva si la curva gira a la izquierda y negativa si la curva gira a la derecha para un observador quien se encuentra en el plano tangente en el sentido indicado por el vector normal. La curvatura geodesica cambia de signo si cambiamos la orientación de la curva o la orientación de la superficie.

Hay que notar que esta definición es en acuerdo con la manera que introducimos esta noción en las secciones anteriores cuando introducimos el triedro de Darboux-Ribaucour. De hecho, de la igualdad (3.2) y de la construcción del vector  $\vec{g}$ , podemos deducir que

$$\begin{aligned} \kappa_g &= (\vec{k} | \vec{g}) \\ &= (\vec{k} | (\vec{u} \circ g) \wedge \vec{t}) \\ &= [\vec{k}, \vec{u} \circ g, \vec{t}] \end{aligned}$$

Usando las relaciones (3.2), tenemos

$$\begin{aligned} \kappa_n &= -\kappa \sin \omega \\ \kappa_g &= \kappa \cos \omega \\ \kappa^2 &= \kappa_n^2 + \kappa_g^2 \end{aligned} \tag{3.4}$$

donde  $\omega$  es el ángulo entre el plano tangente a la sabana y el plano osculador del arco.

Ejemplo:

Podemos disfrutar de la última igualdad para hallar la curvatura geodesica de un círculo de radio  $r$  trazado sobre una esfera de radio  $R$ .

Sabemos desde el capítulo anterior que  $\kappa = 1/r$  y obtenimos en las secciones anteriores que  $\kappa_n = 1/R$ . Entonces, olvidando el problema del signo, tenemos

$$\begin{aligned} \kappa_g &= \sqrt{\kappa^2 - \kappa_n^2} \\ &= \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{Rr} \end{aligned}$$

Entonces, si la esfera es muy grande es decir si  $R \rightarrow \infty$ ,  $\kappa_g = 1/r$  y encontramos de nuevo la curvatura propia del círculo.

Como lo indican las ecuaciones (3.4), esta situación puede encontrarse también no solamente como un caso limite pero cuando el plano osculator y el plano tangente son confundidos:

$$|\kappa_g| = \kappa \Leftrightarrow \kappa_n = 0 \Leftrightarrow \omega = 0$$

Cuando eso se produce todo al largo del arco, el arco es una curva asintotica.

**Definición:**

Un arco regular de clase  $C^2$  trazado sobre una sabana regular de clase  $C^2$  es una geodesica si su curvatura geodesica es nula en cualquiera de sus puntos.

**Proposición:**

Sea  $C$  un arco regular de clase  $C^2$  trazada sobre una sabana regular de clase  $C^2$ . Las condiciones siguientes son equivalentes:

1.  $C$  es una geodesica
2. En cualquier punto de  $C$ ,  $|\kappa_n| = \kappa$
3. En cualquier punto de  $C$ ,  $\vec{k}$  y  $\vec{u}$  son paralelos.
4. En cualquier punto de  $C$ , el plano osculator es ortogonal al plano tangente a la sabana.

**Ejemplos:**

1. La curvatura geodesica de un circulo trazado sobre la esfera se anula si y solamente si sus radios son iguales, es decir si el circulo es un gran circulo. El plano que lo contiene pasa por el centro de la esfera y es entonces, ortogonal al plano tangente.
2. sea la función  $\vec{f}$  una representación parametrica normal de una helice circular (degenerada en un circulo si  $b = 0$ ) trazada sobre el cilindro de revolución de radio  $a$  y de eje  $Oz$ .

$$\vec{f} : R \rightarrow R^3 : \\ s \rightarrow \left( a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

Su vector curvatura es

$$\vec{k}(s) = \vec{f}'' = -\frac{a}{a^2 + b^2} \left( \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, 0 \right)$$

es horizontal y se dirige en dirección del eje del cilindro, como también el vector normal del cilindro. Entonces, esos dos vectores son paralelos, lo que significa que la helice circular (o el circulo)son geodesicas del cilindro de revolución. Además, las generadoras del cilindro tienen una curva nula y entonces una curva geodesica nula: son también geodesica.

### 3.12 Superficies arregladas

Llamamos superficies arregladas, superficies que tienen la particularidad de ser una reunión de derechas. En esta sección vamos a estudiar de manera breve las superficies arregladas. El hecho que esas superficies son engendrada por derechas explica el número de sus aplicaciones técnicas y su importancia en los tratados de geometría descriptiva.

Como en las primeras secciones de este capítulo, trabajamos en un espacio afín real  $E$ .

Sea  $f : U \rightarrow \mathcal{E}$  y  $g : U \rightarrow \vec{E}$  donde  $U$  es un abierto de  $R$ . Es importante de insistir sobre el hecho que los valores de  $f$  son puntos y los valores de  $g$  son vectores.

Suponemos  $f$  y  $g$  de clase  $C^k$  y suponemos que además esta última no se anula. Una representación paramétrica de superficie de la forma

$$h : U^* \rightarrow \mathcal{E} : (u, v) \rightarrow f(u) + vg(u)$$

donde  $U^* \subseteq U \times R$  es llamada una **representación paramétrica arreglada**: una superficie que admite una representación arreglada es dicha **superficie arreglada**. Naturalmente, una superficie arreglada puede también admitir representaciones paramétricas no-arregladas.

Muchas veces,  $f$  va estar una representación paramétrica de clase  $C^k$  de una curva  $D$ . Entonces, la curva de parámetros  $v = 0$  sobre la superficie arreglada es nada más que la curva  $D$ , esta curva se llama **directora** de la representación paramétrica arreglada. Es importante de notar que la directora es ligada a la representación y no a la superficie misma. De hecho, una superficie arreglada admite representaciones arregladas construida sobre diferentes directoras.

Cuanto a la curva de parámetros  $u = u_0$ , esta curva admite la representación paramétrica  $t \rightarrow f(u_0) + tg(u_0)$ : es la derecha pasando por  $f(u_0)$  y con vector director  $g(u_0)$ , cada una de esas derechas (para  $u_0 \in U$ ) es llamada **generadora de la superficie arreglada**. La superficie arreglada es entonces una reunión de derechas.

Si no exigimos que  $f$  sea en todos los casos una representación paramétrica de curva es con fin de no excluir un caso particular importante donde  $f$  es constante. Eso nos da entonces,

$$h : (u, v) \rightarrow P + vg(u)$$

y una superficie arreglada admitiendo una representación arreglada de esta forma es llamada un **cono**. Sus generadoras se encuentran todas en  $P$  que es llamado vértice del cono. Podemos notar que  $U^*$  no puede contener puntos de la forma  $(u, 0)$  porque  $h$  no sería inyectiva en una vecindad de tal punto.

Cuando es  $g$  que es una constante  $w \in V$ , tenemos

$$h : (u, v) \rightarrow f(u) + vw$$

y la superficie arreglada es un cilindro. Sus generadoras son todas paralelas a  $w$ .

Ejemplos:

1. Tomamos de nuevo como ejemplo la paraboloida hiperbolica  $Q \equiv z = x^2 - y^2$ . Vimos que tal superficie puede ser representada por

$$k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (u, v) \rightarrow (u, v, u^2 - v^2)$$

claramente, no es una representación paramétrica arreglada. Pero si la componamos con el cambio de variable  $\varphi$  :

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (s, t) \rightarrow (s + t, s - t)$$

obtenemos

$$f = k \circ \varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (s, t) \rightarrow (s + t, s - t, 4st)$$

que es una representación paramétrica arreglada.

2. Tomamos de nuevo el ejemplo del helice circular. La reunión de las perpendiculares bajadas de la helice sobre su eje es una superficie arreglada llamada "helicoide". Este admite como representación:

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (u, v) \rightarrow (0, 0, bu/(2\pi)) + v(\cos u, \sin u, 0)$$

3. Sea  $C$  un arco en  $E$ . La evoluta tangencial de  $C$  es la superficie arreglada constituida de las tangentes a  $C$ .

Sea mas precisamente, un arco  $C$  representado por  $f : I \rightarrow \mathcal{E}$  de clase  $C^2$  y tal que  $f'$  y  $f''$  son linealmente independiente en cualquier punto. Su evoluta tangencial  $S$  es representada por

$$h : I^* \rightarrow \mathbb{R}^3 : (u, v) \rightarrow f(u) + vf'(u)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \partial_1 h &= f'(u) + vf''(u) \\ \partial_2 h &= f'(u) \end{aligned}$$

de tal manera que  $\partial_2 h(u, 0) = \partial_1 h(u, 0)$ . Eso significa que sobre  $S$ , todos los puntos de  $C$  son singulares y con las hipótesis hechas sobre  $f$ , los otros puntos son regulares. Si  $v \neq 0$ , el plano tangente a  $S$  al punto  $h(u, v) = f(u) + vf'(u)$  es el plano conteniendo este punto y tal que su dirección es engendrada por  $\partial_1 h$  y  $\partial_2 h$  o lo que es equivalente el plano conteniendo  $f(u)$  y tal que su dirección es engendrada por  $f'(u)$  y  $f''(u)$  : entonces, es el plano osculador a  $C$  al punto  $f(u)$ .

### 3.13 Superficies de revolución

Sea una curva de  $E^2(\mathbb{R})$  representada por  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Desemamos pensarla como una curva  $C$  contenida en el plano  $Oxz$  de  $E^3(\mathbb{R})$ . Por eso, vamos a componar  $f$  con la inserción:

$$E^2(\mathbb{R}) \rightarrow E^3(\mathbb{R}) : (u, v) \rightarrow (u, 0, v)$$

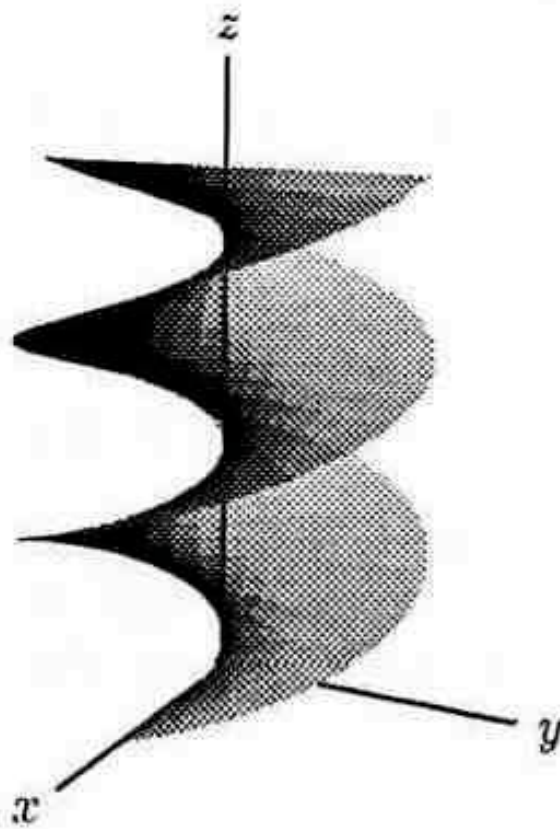


Figura 3.15:

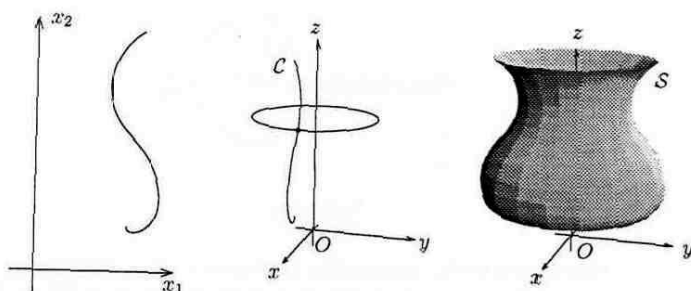


Figura 3.16: Superficie de revolución

lo que nos da:

$$f^* : U \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \rightarrow (f_1(t), 0, f_2(t))$$

Cuando el plano  $Oxz$  gira alrededor del eje  $Oz$ , esta curva va a engendrar una superficie  $S$  llamada **superficie de revolución**. Esta superficie admite como representación paramétrica:

$$g : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 : (u, v) \rightarrow (f_1(u) \cos v, f_1(u) \sin v, f_2(u))$$

Las curvas  $u = \text{cte}$  son círculos de eje  $Oz$ , son llamadas **paralelos** y las curvas  $v = \text{cte}$  son llamadas **meridianos**.

Ejemplos:

1. La representación paramétrica

$$(u, v) \rightarrow (R \cos u \cos v, R \cos u \sin v, R \sin u)$$

de la esfera de radio  $R$  centrada en el origen (privada de sus dos polos) es de hecho, una representación paramétrica de superficie de revolución, el meridiano inicial ( $v = 0$ ) es el semi-círculo representado por

$$\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ \rightarrow \mathbb{R}^3 : t \rightarrow (R \cos t, 0, R \sin t)$$

2. Construimos el toro: es la superficie de revolución engendrada por un círculo de radio  $b > 0$ , girando alrededor de una derecha de su plano situado a una distancia  $a > b$ .

Tomamos esta derecha como eje  $Ox_2$  y localizamos el centro del círculo en el punto  $(a, 0)$  del plano  $Ox_1x_2$ . El círculo es entonces representado, en  $Ox_1x_2$  por

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \rightarrow (a + b \cos t, b \sin t)$$

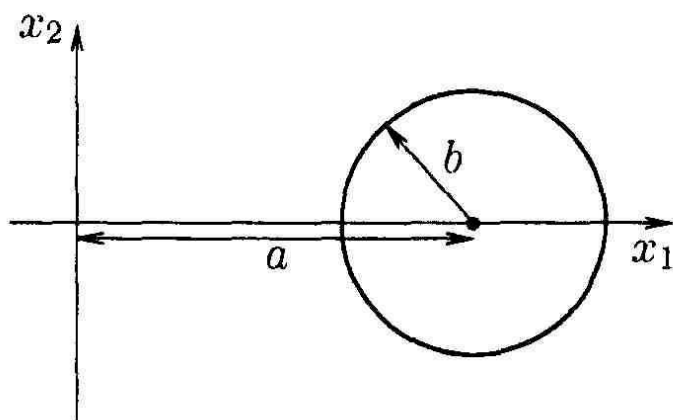


Figura 3.17:

y en  $Oxyz$ , por

$$f^* : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 : t \rightarrow (a + b \cos t, 0, b \sin t)$$

de tal manera que el toro admite por representación paramétrica:

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (u, v) \rightarrow ((a + b \cos u) \cos v, (a + b \cos u) \sin v, b \sin u)$$

eso es una representación paramétrica de superficie de clase  $C^\infty$ .



## Capítulo 4

# Introducción a la geometría Riemanniana

El objeto de la geometría riemanniana es de estudiar las superficies ( y mas generalmente las variedades de dimensión cualquier) independientemente del espacio donde esas superficies o variedades son imersas.

Podemos tener una idea de eso imaginando seres bidimensionales viviendo en una superficie a dos dimensiones: como medio para estudiar su universo, disponen solamente de las medidas que pueden hacer sobre la superficie. No pueden "salir" de su superficie. No tienen consciencia que existe un espacio que contiene su mundo-superficie. Para ellos, el universo tiene dos dimensiones y imaginar que existe otras dimensiones es de la pura especulación abstracta. Pero, esos seres bidimensionales no son en la incapacidad de tener información sobre el mundo donde viven. Imaginamos que construyen un triángulo y miden sus ángulos. Si la suma de los tres ángulos es diferente de  $\pi$ , nuestros seres planos van a poder afirmar que su universo-plano no es un plano, ni una superficie que se deja deformar en un plano: cilindro,cono,...

Mutatis mutandis , eso es exactamente nuestra situación. Tenemos el sentimiento de vivir en un mundo a tres dimensiones pero este mundo no es inmersado en un espacio a cuatro dimensiones o mas? Como saberlo?

Para precisar mas las cosas, la geometría riemanniana estudia las propiedades de las superficies que pueden definirse a partir de medidas hechas sobre la superficie misma. Esas propiedades son dichas **intrínsecas**. Otras propiedades depende de medidas hechas en el espacio donde la superficie es inmersada. Tal propiedad es dicha **extrínseca**.

El ejemplo lo mas fundamental de propiedad intrínseca es la longitud de un arco trazado sobre la superficie. Al opuesto, un ejemplo de propiedad extrínseca es la noción de punto umbilical. Por ejemplo, tomamos un hoja de papel y dibujamos sobre este una curva. Si curvamos la hoja de papel , la longitud del arco queda no-cambiado. Al opuesto, si la hoja es plana, todos los puntos son planares y entonces umbilicales. Pero si enrollamos la hoja para darle una forma

de cilindro de revolución, ningún punto es ombilical por que sobre un cilindro de revolución  $r$ , una de las curvaturas principales es nula y la otra vale  $1/r$  o  $-1/r$  dependiendo de la orientación escogida.

Como no nos interesamos a la manera que la superficie es immersada en el espacio, es decir que nos deseamos describir la superficie usando una representación paramétrica en las coordenadas de los puntos. Nuestra idea es más de poder efectuar medidas sobre la superficie. Para eso, lo que es fundamental es de disponer de la métrica, es decir de la primera forma.

En este breve introducción a la geometría riemanniana, nos limitaremos en el aspecto local de la geometría riemanniana, es decir que vamos a estudiar y definir los arcos riemannianos.

Vamos a usar una presentación matricial con índices, lo que puede aparecer como una pena inútil como los índices van a correr de 1 a 2 pero así la generalización a variedades riemannianas de dimensión superior es evidente.

Un última nota, para ayudar a localizar los límites de la geometría riemanniana: una curva puede siempre deformarse, sin estiramiento, en una línea recta. Así del punto de vista de la geometría riemanniana, cualquier curva es equivalente a las líneas rectas: su "curvatura riemanniana" es nula.

## 4.1 Tensor métrico y arcos riemannianos.

Concretizamos la idea de definir un arco riemanniano por su primera forma fundamental.

Sea  $k \in \mathbb{N}^*$

**Definición:**

Un tensor métrico de clase  $C^k$  es una función a valores matriciales:

$$g : U \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2} : (x^1, x^2) \rightarrow g(x^1, x^2) = \begin{pmatrix} g_{11}(x^1, x^2) & g_{12}(x^1, x^2) \\ g_{21}(x^1, x^2) & g_{22}(x^1, x^2) \end{pmatrix}$$

de clase  $C^{k-1}$  donde  $U$  es un abierto de  $\mathbb{R}^2$  tal que  $g(x^1, x^2)$  es simétrica y definida positiva por cualquier  $(x^1, x^2) \in U$ .

Vamos a ver la "matriz"  $g$  como un producto escalar. Debemos decir que  $g$  representa un producto escalar. En particular, es una forma bilinear, es decir una aplicación:

$$\pi_{(x^1, x^2)} \times \pi_{(x^1, x^2)} \rightarrow \mathbb{R}$$

donde  $\pi_{(x^1, x^2)}$  es pensado como el plano tangente al arco riemanniano en el punto de parámetro  $(x^1, x^2)$ . Esta aplicación manda los dos vectores  $(a^1, a^2)$  y  $(b^1, b^2)$  sobre

$$(a^1 a^2) \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \end{pmatrix} = \sum_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} a^\alpha b^\beta$$

Anticipando sobre lo que va a seguir, vamos a decir que  $g$  es un tensor dos veces covariantes.

Si la aplicación  $g$  es llamada tensor métrico es para recordar que es ella que permite de hacer medidas sobre el arco riemano.

Ejemplos:

1. Sea

$$f : \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ \times R \rightarrow R^3 : (u, v) \rightarrow (R \cos u \cos v, R \cos u \sin v, R \sin u)$$

es una representación paramétrica de la esfera de radio  $R$  centrada en el origen, privada de sus dos polos. Como

$$\begin{aligned} \partial_1 f(u, v) &= (-R \sin u \cos v, -R \sin u \sin v, R \cos u) \\ \partial_2 f(u, v) &= (-R \cos u \sin v, R \cos u \cos v, 0) \end{aligned}$$

Entonces, tenemos

$$\begin{aligned} E &= R^2 \\ F &= 0 \\ G &= R^2 \cos^2 u \end{aligned}$$

Entonces, el tensor métrico correspondiente es

$$g : \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ \times R \rightarrow R^{2 \times 2} : (x^1, x^2) \rightarrow \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \cos^2 x^1 \end{pmatrix}$$

2. Sea

$$f : R^2 \rightarrow R^3 : (u, v) \rightarrow (u, v, u^2 - v^2)$$

del parabolóide hiperbólico. Como

$$\begin{aligned} \partial_1 f(u, v) &= (1, 0, 2u) \\ \partial_2 f(u, v) &= (0, 1, -2v) \end{aligned}$$

Tenemos

$$\begin{aligned} E &= 1 + 4u^2 \\ F &= -4uv \\ G &= 1 + 4v^2 \end{aligned}$$

y el tensor métrico correspondiente es

$$g : R^2 \rightarrow R^{2 \times 2} : (x^1, x^2) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 + 4(x^1)^2 & -4x^1 x^2 \\ -4x^1 x^2 & 1 + 4(x^2)^2 \end{pmatrix}$$

La etapa siguiente es de describir los cambios de parámetros. Para hacer eso, vamos a proceder de manera análoga a lo que hicimos para las representaciones

parametricas. Recordamos que  $f$  y  $\tilde{f}$  son dos representaciones parametricas equivalentes via el cambio de parametro  $\varphi$  ( $f = \tilde{f} \circ \varphi$ ), entonces,

$$g = (J\varphi)^t \cdot (\tilde{g} \circ \varphi) \cdot J\varphi$$

donde  $J\varphi$  es la matriz jacobiana de  $\varphi$ . Explicitamente eso significa que

$$g_{ij} = \sum_{\alpha, \beta} (\tilde{g}_{\alpha\beta} \circ \varphi) \cdot \partial_i \varphi^\alpha \cdot \partial_j \varphi^\beta \quad (4.1)$$

En el marco de la geometría riemaniana, no tenemos representaciones parametrica. Así vamos a tomar la formula (4.1) como definición de un cambio de parametros.

**Definición**

Sea  $g : U \rightarrow R^{2 \times 2}$  y  $\tilde{g} : U \rightarrow R^{2 \times 2}$  dos tensores métricos de clase  $C^k$ . Un cambio de parametros de clase  $C^k$  entre  $g$  y  $\tilde{g}$  es una biyección  $\varphi : U \rightarrow \tilde{U}$  de clase  $C^k$  y de reciproca de clase  $C^k$ .

Si  $\varphi : U \rightarrow \tilde{U}$  es un cambio de parametros, notaremos  $\tilde{\varphi}$  por  $\varphi^{-1}$ .

**Definición**

Cuando existe un cambio de parametros  $\varphi : U \rightarrow \tilde{U}$  de clase  $C^k$  tal que

$$g_{ij} = \sum_{\alpha, \beta} (\tilde{g}_{\alpha\beta} \circ \varphi) \cdot \partial_i \varphi^\alpha \cdot \partial_j \varphi^\beta \quad (4.2)$$

$g : U \rightarrow R^{2 \times 2}$  y  $\tilde{g} : U \rightarrow R^{2 \times 2}$  son dichos equivalentes en clase  $C^k$ .

Contrariamente a la situación encontrado por los arcos de curvas o por las superficies, no es inmediato de ver que esta relación entre tensores métricos es una relación de equivalencia. En esas notas, no vamos a demostrar que esta relación satisface los tres criterios para definir una relación de equivalencia (reflejiva, simetrica y transitiva) (lo dejamos a los lectores como ejercicios).

**Definición**

Un arco riemaniano de clase  $C^k$  es una clase de equivalencia de tensores métricos de clase  $C^k$  por esta relación.

Ejemplo:

Consideramos el siguiente tensor métrico,

$$\tilde{g} : R^2 \setminus R_- \times \{0\} \rightarrow R^{2 \times 2} : (y^1, y^2) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{2(y^1)^2 + (y^2)^2}{(y^1)^2 + (y^2)^2} & \frac{y^1 y^2}{(y^1)^2 + (y^2)^2} \\ \frac{y^1 y^2}{(y^1)^2 + (y^2)^2} & \frac{2(y^2)^2 + (y^1)^2}{(y^1)^2 + (y^2)^2} \end{pmatrix}$$

y el cambio de parametros:

$$\varphi : R_+^* \times ]-\pi, \pi[ \rightarrow R^2 \setminus R_- \times \{0\} : (x^1, x^2) \rightarrow (x^1 \cos x^2, x^1 \sin x^2)$$

y hallamos el tensor métrico que se deduce de  $\tilde{g}$  por el intermediario de  $\varphi$ .

$$\begin{aligned} g(x^1, x^2) &= \begin{pmatrix} \cos x^2 & \sin x^2 \\ -x^1 \sin x^2 & x^1 \cos x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \cos^2 x^2 & \cos x^2 \sin x^2 \\ \cos^2 x \sin x^2 & 1 + \sin^2 x^2 \end{pmatrix} \times \\ &\quad \times \begin{pmatrix} \cos x^2 & -x^1 \sin x^2 \\ \sin x^2 & x^1 \cos x^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & (x^1)^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

El tensor métrico

$$g : R_+^* \times ]-\pi, \pi[ \rightarrow R^{2 \times 2} : (x^1, x^2) \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & (x^1)^2 \end{pmatrix}$$

describo el mismo arco riemaniano que  $\tilde{g}$ .

## 4.2 Campos de vectores tangentes

En teoría de las superficies, si  $f : U \rightarrow R^3$  es una representación paramétrica regular de una sabana  $S$ , darse un campo de vector tangente a  $S$ , es en cada punto  $f(x^1, x^2)$  de  $S$ , darse un vector  $X(x^1, x^2)$  del plano tangente a  $S$  en este punto. Este vector puede entonces, decomponerse en la base local  $Jf = (\partial_1 f, \partial_2 f)$  del plano tangente:

$$\begin{aligned} X(x^1, x^2) &= \zeta^1(x^1, x^2) \cdot \partial_1 f(x^1, x^2) + \zeta^2(x^1, x^2) \cdot \partial_2 f(x^1, x^2) \\ &= Jf(x^1, x^2) \cdot \begin{pmatrix} \zeta^1(x^1, x^2) \\ \zeta^2(x^1, x^2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Eso es equivalente a darse la función:

$$\zeta : U \rightarrow R^2 : (x^1, x^2) \rightarrow \zeta(x^1, x^2) = \begin{pmatrix} \zeta^1(x^1, x^2) \\ \zeta^2(x^1, x^2) \end{pmatrix}$$

Que paso si tentamos de escribir el mismo campo de vectores tangentes con medio de una segunda representación paramétrica de  $S$ ,  $\tilde{f} : \tilde{U} \rightarrow R^3$  equivalente a la primera via el cambio de parametros  $\varphi : U \rightarrow \tilde{U}$ . Tenemos  $f = \tilde{f} \circ \varphi$  y  $\tilde{f} = f \circ \tilde{\varphi}$ , entonces,

$$J\tilde{f} = (Jf \circ \tilde{\varphi}) \cdot J\tilde{\varphi}$$

o también,

$$J\tilde{f} \circ \varphi = Jf \cdot (J\tilde{\varphi} \circ \varphi)$$

Introducimos  $\tilde{X} \equiv X \circ \tilde{\varphi}$  y notamos  $\tilde{\zeta}$  la colona de sus componentes en la base  $J\tilde{f}$ :  $\tilde{X} \equiv J\tilde{f} \cdot \tilde{\zeta}$ . Asi de una parte, tenemos

$$X = Jf \cdot \zeta$$

y de otra parte, tenemos

$$\begin{aligned} X &= \tilde{X} \circ \varphi \\ &= (J\tilde{f} \circ \varphi) \cdot (\tilde{\zeta} \circ \varphi) \\ &= Jf \cdot (J\tilde{\varphi} \circ \varphi) (\tilde{\zeta} \circ \varphi) \end{aligned}$$

Comparando los resultados obtenidos, obtenemos

$$\varsigma = (J\tilde{\varphi} \circ \varphi) (\tilde{\zeta} \circ \varphi)$$

Lo que se traduce componentes por componentes:

$$\varsigma^i = \sum_{\alpha} (\tilde{\zeta}^{\alpha} \circ \varphi) (\partial_{\alpha} \tilde{\varphi}^i \circ \varphi) \quad (4.3)$$

Como algunos autores llaman  $(x^1, x^2) = (\tilde{\varphi}^1(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2), \tilde{\varphi}^2(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2))$ , usan como notación

$$\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^{\alpha}} \equiv \partial_{\alpha} \tilde{\varphi}^i$$

y la ecuación anterior se reescribo

$$\varsigma^i = \sum_{\alpha} \tilde{\zeta}^{\alpha} \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^{\alpha}}$$

donde la composición con  $\varphi$  es sub-entendida.

De nuevo, en geometría riemanaiana, vamos a invertir la perspectiva y vamos a tomar la ecuación (4.3) como base a una definición de un campo de vectores tangentes.

Sea  $k, l \in \mathbb{N}^*$  con  $k > l$  o  $k = l = \infty$ ,

**Definición:**

Sea  $g : U \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$  un tensor métrico de clase  $C^k$ . Una representación de un campo de vector tangentes de clase  $C^l$  relativa a  $g$  es una aplicación de clase  $C^l$ :

$$\varsigma : U \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x^1, x^2) \rightarrow \varsigma(x^1, x^2) = \begin{pmatrix} \varsigma^1(x^1, x^2) \\ \varsigma^2(x^1, x^2) \end{pmatrix}$$

**Definición:**

Sea  $\tilde{g} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$  un segundo tensor métrico de clase  $C^k$  equivalente a  $g$  via el cambio de parametro  $\varphi : U \rightarrow \tilde{U}$  de clase  $C^k$ . Una representación de campo de vectores tangentes de clase  $C^l$  relativa a  $\tilde{g}$ ,  $\tilde{\zeta} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^2$  es llamada equivalente a  $\varsigma$  en clase  $C^l$  si

$$\varsigma^i = \sum_{\alpha} (\tilde{\zeta}^{\alpha} \circ \varphi) (\partial_{\alpha} \tilde{\varphi}^i \circ \varphi) \quad (4.4)$$

**Definición:**

Un campo de vectores tangentes de clase  $C^l$  a un arco riemanniano de clase  $C^k$  es una clase de equivalencia de representaciones de campos de vectores tangentes de clase  $C^l$  por la relación anterior.

Ejemplos:

Consideramos el parabolóide de revolución de ecuación  $z = x^2 + y^2$ . En un punto cualquiera  $(x, y, z)$  de este parabolóide, el vector  $w = (-y, x, 0)$  es un vector tangente.

Una representación paramétrica del parabolóide es

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (u, v) \rightarrow (u, v, u^2 + v^2)$$

entonces,

$$\begin{aligned}\partial_1 f(u, v) &= (1, 0, 2u) \\ \partial_2 f(u, v) &= (0, 1, 2v)\end{aligned}$$

Y el vector tangente  $w$  puede escribirse en función de los parámetros  $u, v$ .

$$X(u, v) = (-v, u, 0)$$

admite, en la base  $Jf(u, v)$  las coordenadas,

$$\varsigma(u, v) = \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix}$$

Pero podemos también describir el parabolóide usando la siguiente representación:

$$\tilde{f} : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 : (r, \theta) \rightarrow (r \cos \theta, r \sin \theta, r^2)$$

Aquí tenemos

$$\begin{aligned}\partial_1 \tilde{f} &= (\cos \theta, \sin \theta, 2r) \\ \partial_2 \tilde{f} &= (-r \sin \theta, r \cos \theta, 0)\end{aligned}$$

y  $w$  es igual a

$$\tilde{X} = \partial_2 \tilde{f}$$

de tal manera que

$$\tilde{\varsigma} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El cambio de parámetro es descrito por

$$\tilde{\varphi} : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : (r, \theta) \rightarrow \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}$$

entonces

$$\begin{aligned}\partial_1 \tilde{\varphi}^1(r, \theta) &= \cos \theta \\ \partial_1 \tilde{\varphi}^2(r, \theta) &= \sin \theta \\ \partial_2 \tilde{\varphi}^1(r, \theta) &= -r \sin \theta \\ \partial_2 \tilde{\varphi}^2(r, \theta) &= r \cos \theta\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\partial_1 \tilde{\varphi}^1(\varphi(u, v)) &= \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} \\ \partial_1 \tilde{\varphi}^2(\varphi(u, v)) &= \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} \\ \partial_2 \tilde{\varphi}^1(\varphi(u, v)) &= -v \\ \partial_2 \tilde{\varphi}^2(\varphi(u, v)) &= u\end{aligned}$$

Entonces, tenemos

$$\begin{aligned}\zeta^1 &= \zeta^1(\varphi(u, v)) \cdot \partial_1 \tilde{\varphi}^1(\varphi(u, v)) + \zeta^2(\varphi(u, v)) \cdot \partial_2 \tilde{\varphi}^1(\varphi(u, v)) \\ &= -v \\ \zeta^1 &= \zeta^1(\varphi(u, v)) \cdot \partial_1 \tilde{\varphi}^2(\varphi(u, v)) + \zeta^2(\varphi(u, v)) \cdot \partial_2 \tilde{\varphi}^2(\varphi(u, v)) \\ &= u\end{aligned}$$

Como el campo de vectores tangentes se transforma de la siguiente manera sobre un cambio de parametros,

$$\zeta^i = \sum_{\alpha} (\zeta^{\alpha} \circ \varphi) (\partial_{\alpha} \tilde{\varphi}^i \circ \varphi) \quad (4.5)$$

vamos a decir que el vector  $\zeta$  es un tensor un vez contravariante. Un tensor una vez contravariante es sinonimo de vector (tangente).

Gracias al tensor métrico, podemos definir el producto escalar de dos campos de vectores tangentes: si  $a$  y  $b$  son dos representaciones de campos de vectores tangentes sobre un arco riemano con  $g$  como tensor métrico:

$$\begin{aligned}(a|b) &\equiv (a^1 \ a^2) \cdot \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \end{pmatrix} \\ &= \sum_{\alpha, \beta} g_{\alpha\beta} a^{\alpha} b^{\beta}\end{aligned}$$

Definimos la norma del campo de vectores tangentes como

$$\|a\|_g \equiv \sqrt{(a|a)}$$

Es un ejercicio facil de averiguar que esas expresiones son bien independientes del tensor métrico escogido:

$$(a|b)_g = (\tilde{a}|\tilde{b}) \circ \varphi$$

Para probar eso, podemos usar el hecho que

$$J(f \circ g) = (Jf \circ g) \cdot Jg$$

y aplicando eso a  $f = g^{-1}$ , tenemos

$$\begin{aligned}I &= J(g^{-1} \circ g) \\ &= (Jg^{-1} \circ g) \cdot Jg \\ &= (Jg \circ g^{-1}) \cdot Jg^{-1}\end{aligned}$$

donde  $I$  es la identidad.



## 4.3 Campos de tensores

### 4.3.1 Productos tensoriales.

Antes de definir los campos de tensores, es seguramente bueno de recordar lo que es un tensor. Lo haremos de manera pragmática dejando atrás los detalles y justificaciones para el curso de álgebra.

Sea  $K$  un cuerpo conmutativo y  $V, W$  dos  $K$ -espacios vectoriales. Su producto tensorial  $V \otimes_K W$  es el  $K$ -espacio vectorial engendrado por las expresiones  $v \otimes w$  llamados tensores elementales donde  $v \in V$  y  $w \in W$ , estas expresiones satisfacen a los tres reglas de cálculo siguientes:

1.  $(v + v') \otimes w = v \otimes w + v' \otimes w$
2.  $v \otimes (w + w') = v \otimes w + v \otimes w'$
3.  $(kv) \otimes w = v \otimes (kw) = k(v \otimes w)$

Entonces,  $V \otimes_K W$  es el conjunto de todas las combinaciones lineales formales de los tensores fundamentales

$$V \otimes_K W \equiv \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \sum_{k=1}^n v_k \otimes w_k : v_i \in V, w_j \in W \right\}$$

Si  $(e_1, \dots, e_n)$  es una base de  $V$  y  $(f_1, \dots, f_m)$  una base de  $W$ . Entonces,  $(e_1 \otimes f_1, \dots, e_1 \otimes f_m, e_2 \otimes f_1, \dots, e_n \otimes f_m)$  es una base de  $V \otimes_K W$ .

Es posible de generalizar eso a productos tensoriales de varios espacios vectoriales. El caso que nos interesa es el del producto tensorial de  $p$  copias del dual  $V^*$  de un  $K$ -espacio vectorial  $V$ , es decir del  $K$ -espacio vectorial de las aplicaciones lineales de  $V$  en  $K$ , y de  $q$  copias de  $V$  ( $p, q \in \mathbb{N}$ ):

$$\left( \bigotimes_K^p V^* \right) \otimes_K \left( \bigotimes_K^q V \right) \equiv \underbrace{V^* \otimes_K \dots \otimes_K V^*}_p \otimes_K \underbrace{V \otimes_K \dots \otimes_K V}_q$$

Si  $p = q = 0$ , este producto tensorial es por convención el cuerpo  $K$  mismo.

Un tensor elemental es entonces de la siguiente forma:

$$\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_p \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_q$$

donde  $\varphi_i$  son formas lineales sobre  $V$ , es decir aplicaciones lineales de  $V \rightarrow K$  y los  $v_i$  son vectores de  $V$ . Un tal tensor es dicho  $p$  veces covariantes y  $q$  veces contravariante. Así por ejemplo,

- un tensor una vez contravariante es sencillamente un vector
- un tensor una vez covariante es una forma lineal

- un tensor dos veces covariante es una forma bilineal
- un tensor zero vez contravariante y zero vez covariante es un escalar.

Si  $e = (e_1, \dots, e_n)$  una base de  $V$ , definimos para cada indice  $i$  la forma lineal:

$$e^i : V \rightarrow K : \sum_{\alpha} a^{\alpha} e_{\alpha} \rightarrow a^i$$

La lista  $e^* = (e^1, \dots, e^n)$  es entonces una base de  $V^*$  llamada base dual de  $e$ . Si  $\varphi \in V^*$ , la  $i$ -ésima coordenadas de  $\varphi$  en este base dual es  $\varphi(e_i)$ . En consecuencia,

$$e_{(q)}^{(p)} = (e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_q})_{1 \leq i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q \leq n}$$

es una base de  $(\bigotimes_K^p V^*) \otimes_K (\bigotimes_K^q V)$ . Cada tensor es caracterizado por su  $n^{p+q}$  componentes  $t_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$  en este base:

$$t = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q} t_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\beta_1 \dots \beta_q} (e^{\alpha_1} \otimes \dots \otimes e^{\alpha_p} \otimes e_{\beta_1} \otimes \dots \otimes e_{\beta_q})$$

Si  $\tilde{e} = (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n)$  es una segunda base de  $V$ , conocemos la matriz del cambio de base  ${}_{\tilde{e}}(I)_e$ , notamos  $a_j^i$  sus elementos. Entonces, si  $v = \sum_{\alpha} v^{\alpha} e_{\alpha} = \sum_{\alpha} \tilde{v}^{\alpha} \tilde{e}_{\alpha} \in V$ ,

$$\tilde{v}^i = \sum_{\alpha} a_{\alpha}^i v^{\alpha}$$

Si  $\varphi = \sum_{\beta} \varphi_{\beta} e^{\beta} = \sum_{\beta} \tilde{\varphi}_{\beta} \tilde{e}^{\beta} \in V^*$ ,

$$\begin{aligned} \varphi_j &= \varphi(e^j) = \varphi\left(\sum_{\alpha} a_j^{\alpha} \tilde{e}_{\alpha}\right) \\ &= \sum_{\alpha} a_j^{\alpha} \tilde{\varphi}_{\alpha} \end{aligned}$$

lo que significa que  ${}_{\tilde{e}}(I)_e = (a_j^i)$  es también la matriz de cambio de base de  $e^*$  verso  $\tilde{e}^*$ :

$$e^*(I)_{\tilde{e}^*} = ({}_{\tilde{e}}(I)_e)^{-1}$$

Si notamos  $b_j^i$  los elementos de esta matriz, tenemos

$$\tilde{\varphi}_j = \sum_{\alpha} b_j^{\alpha} \varphi_{\alpha}$$

Esas reglas de transformación sobre cambio de base se generaliza de manera inmediata al caso de un tensor  $p$  veces covariantes y  $q$  veces contravariantes: cada indice covariante va a transformarse como  $\tilde{\varphi}_j$  y cada indice contravariante se transforma como  $\tilde{v}^i$ .

### 4.3.2 Campos de tensores.

**Definición:**

Sea  $g : U \rightarrow R^{2 \times 2}$  un tensor métrico de clase  $C^k$ . Una representación de un campo de tensor de clase  $C^k$ ,  $p$  veces covariante y  $q$  veces contravariantes, relativo a  $g$  es una aplicación:

$$T : U \rightarrow R^{2^{p+q}}$$

de clase  $C^l$  teniendo  $2^{p+q}$  componentes

$$T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} : U \rightarrow R$$

( $1 \leq i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q \leq 2$ ).

**Definición:**

Sea  $\tilde{g} : \tilde{U} \rightarrow R^{2 \times 2}$  un segundo tensor métrico de clase  $C^k$  equivalente a  $g$  via el cambio de parametro:  $\varphi : U \rightarrow \tilde{U}$  de clase  $C^k$ . Una segunda representación de campo de tensores de clase  $C^l$ ,  $p$  veces covariante y  $q$  veces contravariantes, relativa a  $\tilde{g}$ ,  $\tilde{T} : \tilde{U} \rightarrow R^{2^{p+q}}$  es dicha equivalente a  $T$  en clase  $C^l$  si

$$T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} = \sum_{\alpha_1 \dots \alpha_p, \beta_1 \dots \beta_q} \left( T_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\beta_1 \dots \beta_q} \right) \partial_{i_1} \varphi^{\alpha_1} \dots \partial_{i_p} \varphi^{\alpha_p} (\partial_{\beta_1} \tilde{\varphi}^{j_1} \circ \varphi) \dots (\partial_{\beta_q} \tilde{\varphi}^{j_q} \circ \varphi)$$

**Definición:**

Un campo de tensor de clase  $C^l$ ,  $p$  veces covariantes y  $q$  veces contravariantes, sobre un arco riemanniano de clase  $C^k$  es una clase de equivalencia de representaciones de campos de tensores de clase  $C^l$ ,  $p$  veces covariantes y  $q$  veces contravariantes por la relación anterior.

Un ejemplo de tensor dos veces contravariantes es el tensor métrico contravariante: es sencillamente el inverso de la matriz del producto escalar local:

$$\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}^{-1}$$

Y entonces, tenemos

$$\sum_{\alpha} g^{\alpha j} g_{i \alpha} = \delta_i^j$$

Es facil de demostrar que tal objeto se transforma efectivamente como un tensor dos veces contravariante.

## 4.4 Arcos trazados sobre un arco riemanniano

**Definición:**

Sea  $g : U \rightarrow R^{2 \times 2}$  un tensor métrico de clase  $C^k$ . Una representación paramétrica de clase  $C^l$  de arco relativo a  $g$  es una aplicación de clase  $C^l$ :

$$c : I \rightarrow U$$

donde  $I$  es un intervalo abierto de  $R$ .

**[Definición]**

Sea  $\tilde{g} : \tilde{U} \rightarrow R^{2 \times 2}$  un segundo tensor métrico de clase  $C^k$  equivalente a  $g$  via el cambio de parametros  $\varphi : U \rightarrow \tilde{U}$  de clase  $C^k$ . Una representación paramétrica de clase  $C^l$  de arco relativo a  $\tilde{g}$ , sea  $\tilde{c} : \tilde{I} \rightarrow \tilde{U}$  es dicha equivalente a  $c$  en clase  $C^l$  si existe un cambio de parametros de clase  $C^l$ :

$$\psi : I \rightarrow \tilde{I}$$

tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{c} & U \\ \downarrow \psi & & \downarrow \varphi \\ \tilde{I} & \xrightarrow{\tilde{c}} & \tilde{U} \end{array}$$

sea conmutativo, es decir que  $\tilde{c} \circ \psi = \varphi \circ c$ .

**[Definición]**

Sea  $C$  un arco de clase  $C^l$  trazado sobre un arco riemanniano de clase  $C^l$ , representado , relativamente al tensor métrico  $g : U \rightarrow R^{2 \times 2}$  por  $c : I \rightarrow U$ . Sea  $a, b \in I$ , la longitud de  $C$  es

$$L(C) \equiv \int_I \|c'\|_{g \circ c}$$

La presencia de la composición con  $c$  en el índice de la norma es indispensable si queremos disponer de una función a una variable a integrar.

Esta definición para ser valable tiene que ser independiente de las representaciones escogidas. Vamos a averiguarlo. Sea entonces,  $\tilde{g} : \tilde{U} \rightarrow R^{2 \times 2}$  y sea  $\tilde{c} : \tilde{I} \rightarrow \tilde{U}$  una representación paramétrica de arco relativa a  $\tilde{g}$  equivalente a  $c$  via  $\psi : I \rightarrow \tilde{I}$ . Tenemos que probar que

$$\int_I \|c'\|_{g \circ c} = \int_{\tilde{I}} \|\tilde{c}'\|_{\tilde{g} \circ \tilde{c}}$$

Por eso vamos a usar la relación de equivalencia de las representaciones paramétricas de arcos:

$$\tilde{c} \circ \psi = \varphi \circ c$$

Derivando los dos miembros de la ecuación, obtenemos

$$(\tilde{c}' \circ \psi) \cdot \psi' = (\partial_1 \varphi \circ c) \cdot (c^1)' + (\partial_2 \varphi \circ c) \cdot (c^2)'$$

lo que puede escribirse componente por componente,

$$((\tilde{c}'^i) \circ \psi) \cdot \psi' = \sum_{\alpha} (c^\alpha)' (\partial_\alpha \varphi^i \circ c)$$

Asi podemos hacer un cambio de variable en la integral definida:

$$\begin{aligned}
\int_{\tilde{I}} \|\tilde{c}'\|_{\tilde{g} \circ \tilde{c}} &= \int_I \|\tilde{c}' \circ \psi\|_{\tilde{g} \circ \tilde{c} \circ \psi} |\psi'| \\
&= \int_I \sqrt{\sum_{\alpha\beta} (\tilde{g}_{\alpha\beta} \circ \tilde{c} \circ \psi) ((c^\alpha)' \circ \psi) ((c^\beta)' \circ \psi) \cdot |\psi'|} \\
&= \int_I \sqrt{\sum_{\alpha\beta} (\tilde{g}_{\alpha\beta} \circ \varphi \circ c) (((c^\alpha)' \circ \psi) \cdot \psi') (((c^\beta)' \circ \psi) \cdot \psi')} \\
&= \int_I \sqrt{\sum_{\alpha\beta\gamma\delta} (\tilde{g}_{\alpha\beta} \circ \varphi \circ c) (c^\gamma)' (\partial_\gamma \varphi^\alpha \circ c) (c^\delta)' (\partial_\delta \varphi^\beta \circ c)} \\
&= \int_I \sqrt{\sum_{\alpha\beta\gamma\delta} (\tilde{g}_{\alpha\beta} \circ \varphi) \cdot (\partial_\gamma \varphi^\alpha) \cdot (\partial_\delta \varphi^\beta \circ c) (c^\gamma)' (c^\delta)'} \\
&= \int_I \sqrt{\sum_{\gamma\delta} (g_{\alpha\beta} \circ c) (c^\gamma)' (c^\delta)'} \\
&= \int_I \|c'\|_{g \circ c}
\end{aligned}$$

## 4.5 Los simbolos de Christoffel

Queremos ahora describir la curvatura de un arco riemanoiano. Para eso, regresemos un momento en el caso de una sabana  $S$  en el espacio, descrita por la representación parametrica  $f : U \rightarrow R^3$ .

Vimos en el capitulo anterior que la curvatura normal de  $S$  en un punto depende de tres derivadas parciales de orden 2 de  $f$ :  $\partial_{1,2}^2 f$  y  $\partial_{12} f$ . Entonces, suponemos que  $f$  es de clase  $C^2$ . Esas derivadas parciales de orden 2 no estan en el plano tangente. Asi no es posible de expresarlos en la base de las derivadas parciales. Pero si completamos la sucesión  $(\partial_1 f, \partial_2 f)$  por el vector  $\vec{u}$  normal unitario a  $S$ , obtenemos una base  $(\partial_1 f, \partial_2 f, \vec{u})$  de  $R^3$ . Para cualquier vector  $v \in R^3$ , podemos decomponerlo en

$$v = v^1 \partial_1 f + v^2 \partial_2 f + v^3 \vec{u}$$

o usando sus coordenadas covariantes:

$$\begin{aligned}
v_1 &= (v | \partial_1 f) \\
v_2 &= (v | \partial_2 f) \\
v_3 &= (v | \vec{u})
\end{aligned}$$

Si la base es ortonormal, esas dos representaciones de  $v$  por escalares coinciden. Pero en general,  $(\partial_1 f, \partial_2 f)$  no son ni unitarios, ni ortogonales. Pero  $\vec{u}$  es unitario y ortogonal a los dos vectores de las derivadas parciales:

$$v^3 = v_3$$

Por las dos primeras componentes, tenemos

$$\begin{aligned} v_i &= (v|\partial_i f) \\ &= v^1(\partial_1 f|\partial_i f) + v^2(\partial_2 f|\partial_i f) \\ &= v^1 g_{1i} + v^2 g_{2i} \\ &= \sum_{\alpha} v^{\alpha} g_{\alpha i} \end{aligned}$$

Y inversamente, tenemos

$$v^i = \sum_{\alpha} v_{\alpha} g^{\alpha i}$$

Si efectuamos esos dos tipos de decomposiciones para las derivadas parciales de orden 2, las componentes en  $\partial_1 f$  y en  $\partial_2 f$  van a llamarse los simbolos de Christoffel:

$$\begin{aligned} \Gamma_{ijk} &= (\partial_i \partial_j f | \partial_k f) \\ \partial_i \partial_j f &= \Gamma_{ij}^1 \partial_1 f + \Gamma_{ij}^2 \partial_2 f + h_{ij} \vec{u} \end{aligned}$$

Los  $\Gamma_{ijk}$  son los simbolos de Christoffel de primero especie y los  $\Gamma_{ij}^k$ , los simbolos de Christoffel de segundo especie.

Los coeficientes  $h_{ij}$  no son intrinsecos. De hecho, los conocemos ya:

$$\begin{aligned} h_{11} &= L \\ h_{12} &= M = h_{21} \\ h_{22} &= N \end{aligned}$$

son los coeficientes de la segunda forma fundamental.

Ejemplo:

Consideramos la esfera de radio  $R$  centrada en el origen, tiene como representación parametrica:

$$f : (u, v) \rightarrow R(\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$$

Entonces, tenemos

$$\begin{aligned} \partial_1 f &= R(-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, \cos u) \\ \partial_2 f &= R(-\cos u \sin v, \cos u \cos v, 0) \end{aligned}$$

y

$$\partial_1 f \wedge \partial_2 f = R^2(-\cos^2 u \cos v, \cos^2 u \sin v, -\sin u \cos u)$$

y el vector normal es

$$\vec{u} = (-\cos u \cos v, -\cos u \sin v, -\sin u)$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\partial_1^2 f &= R(-\cos u \cos v, -\cos u \sin v, -\sin u) \\ \partial_2^2 f &= -R(\cos u \sin v, \cos u \cos v, 0) \\ \partial_1 \partial_2 f &= R(-\sin u \sin v, -\sin u \cos v, 0)\end{aligned}$$

Los simbolos de Christoffel de primera especie son

$$\begin{aligned}\Gamma_{111} &= 0 \\ \Gamma_{112} &= 0 \\ \Gamma_{121} &= 0 \\ \Gamma_{122} &= -R^2 \sin u \cos u \\ \Gamma_{221} &= R^2 \sin u \cos u \\ \Gamma_{222} &= 0\end{aligned}$$

También tenemos

$$\begin{aligned}\partial_1^2 f &= -f \\ \partial_1 \partial_2 f &= -\tan u \cdot \partial_2 f \\ \partial_2^2 f &= \sin u \cos u \cdot \partial_1 f + R \cos^2 u \cdot \vec{u}\end{aligned}$$

De esas relaciones, podemos deducir inmediatamente los simbolos de Christoffel de segundo especie.

Usando el teorema de Young,  $\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f$ , tenemos

$$\begin{aligned}\Gamma_{ijk} &= \Gamma_{jik} \\ \Gamma_{ij}^k &= \Gamma_{ji}^k\end{aligned}$$

Como ademas, los simbolos de Christoffel de primera especie y de segunda especie son respectivamente coordenadas covariantes y contravariantes, podemos obtener uno del otro usando el tensor métrico:

$$\begin{aligned}\Gamma_{ijk} &= \sum_a g_{ak} \Gamma_{ij}^a \\ \Gamma_{ij}^k &= \sum_a g^{ak} \Gamma_{ija}\end{aligned}$$

Podemos observar que

$$\begin{aligned}\partial_k g_{ij} &= \partial_k (\partial_i f | \partial_j f) \\ &= (\partial_k \partial_i f | \partial_j f) + (\partial_i f | \partial_k \partial_j f) \\ &= \Gamma_{kij} + \Gamma_{kji}\end{aligned}$$

Permutando circularmente los indices, obtenemos

$$\begin{aligned}\partial_i g_{jk} &= \Gamma_{ijk} + \Gamma_{ikj} = \Gamma_{ijk} + \Gamma_{kij} \\ \partial_j g_{ki} &= \Gamma_{jki} + \Gamma_{jik} = \Gamma_{kji} + \Gamma_{ijk}\end{aligned}$$

Substrayendo la primera de esas tres relaciones de la suma de las dos ultimas, y dividiendo por dos, obtenemos,

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij}) \quad (4.6)$$

Como esta relación expresa los simbolos de Christoffel de primera especie en función de las unicas componentes del tensor métrico, observamos que es bien una cuantidad intrinseca ligada al tensor métrico. En geometría riemaniana, usamos la Ec.(4.6) como definición de los simbolos de Christoffel de primera especie:

**Definición:**

Sea  $g : U \rightarrow R^{2 \times 2}$  un tensor métrico de clase  $C^2$ . Los simbolos de Christoffel de primera especie de este tensor métrico son  $2^3$  funciones

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij}) : U \rightarrow R \quad (4.7)$$

Los simbolos de Christoffel de segunda especie de este tensor métrico son las  $2^3$  funciones:

$$\Gamma_{ij}^k = \sum_a g^{ak} \Gamma_{ija} : U \rightarrow R$$

Es importante de notar que los simbolos de Christoffel no son las componentes de un tensor 3 veces contravariantes o de un tensor 1 vez contravariante y 2 veces covariantes. Las formulas de transformación de los simbolos de Christoffel durante un cambio de parametros no son las formulas exigidas por la definición de tensor. Eso significa que los simbolos de Christoffel no son relacionado a arco riemaniano pero bien al tensor métrico.

**Proposición:**

Sea  $g : U \rightarrow R^{2 \times 2}$  y  $\tilde{g} : \tilde{U} \rightarrow R^{2 \times 2}$  dos tensores métricos de clase  $C^2$  equivalente en clase  $C^2$  via  $\varphi : U \rightarrow \tilde{U}$ . Si los  $\Gamma_{ijk}$  y los  $\Gamma_{ij}^k$  son los simbolos de Christoffel del tensor métrico  $g$ , tenemos

$$\Gamma_{ijk} = \sum_{a,b,c} (\Gamma_{abc} \circ \varphi) \cdot \partial_i \varphi^a \cdot \partial_j \varphi^b \cdot \partial_k \varphi^c + \sum_{a,b} (\tilde{g}_{ab} \circ \varphi) \cdot \partial_i \partial_j \varphi^a \cdot \partial_k \varphi^b$$

y

$$\Gamma_{ij}^k = \sum_{a,b,c} (\Gamma_{ab}^c \circ \varphi) \cdot \partial_i \varphi^a \cdot \partial_j \varphi^b \cdot (\partial_c \tilde{\varphi}^k \circ \varphi) + \sum_a \partial_i \partial_j \varphi^a \cdot (\partial_a \tilde{\varphi}^k \circ \varphi) \quad (4.8)$$

La demostración es directa y sin problemas.

## 4.6 Tensor de Riemann

Para introducir una definición riemaniana de la curvatura total, tenemos que recordarnos que para una sabana  $S$  en el espacio

$$\kappa_\tau = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21}}{g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}}$$



El denominador es una expresión intrínseca. Por el numerator, definimos

$$R_{mijk} = h_{ik}h_{jm} - h_{ij}h_{km}$$

Así

$$\kappa_\tau = \frac{R_{1212}}{g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}}$$

Hasta ahora, esos símbolos no son muy intrínsecos. Pero si  $f : U \rightarrow R^3$  es una representación paramétrica de  $S$ ,

$$\begin{aligned} R_{mijk} &= (h_{ik}\vec{u}|h_{jm}\vec{u}) - (h_{ij}\vec{u}|h_{km}\vec{u}) \\ &= \left( \partial_i\partial_k f - \sum_a \Gamma_{ik}^a \partial_a f | \partial_j\partial_m f - \sum_a \Gamma_{jm}^a \partial_a f \right) - \\ &\quad - \left( \partial_i\partial_j f - \sum_a \Gamma_{ij}^a \partial_a f | \partial_k\partial_m f - \sum_a \Gamma_{km}^a \partial_a f \right) \\ &= \partial_j\Gamma_{ikm} - \partial_k\Gamma_{ijm} + \sum_a (\Gamma_{km}^a \Gamma_{ija} - \Gamma_{jm}^a \Gamma_{ika}) \end{aligned}$$

Para obtener este resultado usamos las relaciones entre los símbolos de Christoffel de primera especie y de segunda especie. Eso constituye una expresión intrínseca del símbolo  $R_{mijk}$ . De hecho, las funciones  $R_{mijk}$  son los  $2^4$  componentes de un tensor 4 veces covariantes.

**Definición:**

Sea  $g : U \rightarrow R^{2 \times 2}$  un tensor métrico de clase  $C^3$ . Los  $2^4$  componentes del tensor de Riemann covariante del arco riemano representado por  $g$  son las funciones:

$$R_{mijk} \equiv \partial_j\Gamma_{ikm} - \partial_k\Gamma_{ijm} + \sum_a (\Gamma_{km}^a \Gamma_{ija} - \Gamma_{jm}^a \Gamma_{ika})$$

Este tensor es llamado tensor de Riemann o tensor de curvatura de segunda especie.

**Proposición:**

El tensor de Riemann covariante se transforma como

$$R_{mijk} = \sum_{a,b,c,d} \left( \tilde{R}_{dabc} \circ \varphi \right) \cdot \partial_m \varphi^d \cdot \partial_i \varphi^a \cdot \partial_j \varphi^b \partial_k \varphi^c$$

cuando pasamos del tensor métrico  $g$  a un otro tensor métrico  $\tilde{g}$  equivalente via  $\varphi$ .

**Definición:**

Las  $2^4$  componentes del tensor de Riemann de un arco riemano son las funciones:

$$R_{ijk}^m \equiv \sum_a g^{ma} R_{aijk}$$

Es también llamado tensor de Riemann o de curvatura de primera especie. Es un tensor una vez contravariante y tres veces covariante.

Proposición:

*El tensor de Riemann se transforma como*

$$R_{ijk}^m = \sum_{a,b,c,d} \left( \tilde{R}_{abc}^d \circ \varphi \right) \cdot (\partial_d \tilde{\varphi}^m \circ \varphi) \cdot \partial_i \varphi^a \cdot \partial_j \varphi^b \partial_k \varphi^c$$

cuando pasamos del tensor métrico  $g$  a un otro tensor métrico  $\tilde{g}$  equivalente via  $\varphi$ .

Lema:

*Para cualquier  $i, j, k, m$  tenemos*

$$\partial_k \Gamma_{jmi} - \partial_j \Gamma_{kmi} = \partial_m \Gamma_{ikj} - \partial_i \Gamma_{kmj} = \partial_j \Gamma_{ikm} - \partial_k \Gamma_{ijm}$$

La demostración es un calculo directo, basado sobre la definición de los simbolos de Christoffel de primera especie.

Proposición:

*Para cualquier  $i, j, k, m$  tenemos*

1.  $R_{jkm i} = R_{mijk}$
2.  $R_{mikj} = -R_{mijk}$
3.  $R_{imjk} = -R_{mijk}$
4.  $R_{ikj}^m = -R_{ijk}^m$

Para el tensor de Riemann de una sabana de  $E(R^3)$  tenemos

$$R_{1212} = h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21} = LN - M^2$$

y

$$R_{2112} = R_{1221} = -(LN - M^2)$$

y

$$R_{2121} = LN - M^2$$

Los 12 otras componentes de  $R_{mijk}$  son nulas.

Consecuencia: (Teorema Egregium):

*La curvatura de Gauss de una sabana de clase  $C^3$  en el espacio  $E(R^3)$  es determinada por los únicos coeficientes de la primera forma fundamental.*

Demostración:

De hecho, el tensor de Riemann fue introducido tal que

$$\kappa_\tau = \frac{R_{1212}}{g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}}$$

Ademas  $R_{1212}$  es definido en termino de los simbolos de Christoffel y los simbolos de Christoffel se calculan a partir de las componentes del tensor métrico.

## 4.7 Campos de vectores a lo largo de un arco

En algunas situaciones, nos seria util de poder considerar campos de vectores tangentes a un arco riemaniano definido no sobre todo el arco pero solamente al largo de un arco trazado sobre este arco riemaniano. Un ejemplo importante de tal situación es dado por el campo de vectores tangentes a un arco que evidentemente no es definido a fuera del arco.

En el caso de una sabana  $S$  en  $E(R^3)$  representada por  $f : U \rightarrow R^3$  y de un arco  $C$  trazado sobre  $S$  con  $c : I \rightarrow U$ , para darse, en un punto  $f(c(t))$  de  $C$ , un vector  $X(t)$  tangente a  $S$ , es necesario de darse dos componentes de este vector en la base del plano tangente que es constituido de las derivadas parciales de  $f$ , evaluadas en  $c(t)$ .

$$\begin{aligned} X(t) &= \zeta^1 \cdot \partial_1 f(c(t)) + \zeta^2 \cdot \partial_2 f(c(t)) \\ &= Jf(c(t)) \cdot \begin{pmatrix} \zeta^1 \\ \zeta^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Como usualmente, para obtener una definición riemaniana de este tipo de campo de vectores, vamos a decir que el campo de vectores tangentes al largo de  $C$  es representado por dos funciones  $\zeta^{1,2}$ , mismo si la base de las derivadas parciales no existe que en nuestra imaginación.

### **Definición:**

Sea  $g : U \rightarrow R^{2 \times 2}$  un tensor métrico de clase  $C^k$  y sea  $c : I \rightarrow U$  una representación de arco de clase  $C^k$  trazado sobre este arco riemaniano. Una representación de un campo vectorial tangentes de clase  $C^l$  relativa a  $g$  y a  $c$  es una aplicación de clase  $C^l$ :

$$\zeta : I \rightarrow R^2 : t \rightarrow \zeta(t) = \begin{pmatrix} \zeta^1(t) \\ \zeta^2(t) \end{pmatrix}$$

Ahora tenemos que precisar cuando dos tales representaciones tienen que ser consideradas como equivalentes. Sea  $\tilde{g} : \tilde{U} \rightarrow R^{2 \times 2}$  un segundo tensor métrico de clase  $C^k$  equivalente a  $g$  en clase  $C^k$  via  $\varphi : U \rightarrow \tilde{U}$ . Y sea  $\tilde{c} : \tilde{I} \rightarrow \tilde{U}$  una representación de arco relativa a  $\tilde{g}$ , equivalente a  $c$  via  $\psi : I \rightarrow \tilde{I}$ , es decir  $\varphi \circ c = \tilde{c} \circ \psi$ . Sea  $\tilde{\zeta} : \tilde{I} \rightarrow R^2$ .

Intuitivamente, pensamos que  $\tilde{g}$  proviene de una representación paramétrica  $\tilde{f}$  equivalente a  $f$  via  $\varphi$ . Introducimos,

$$X \equiv (Jf \circ c) \cdot \zeta$$

y

$$\tilde{X} \equiv X \circ \psi$$

y notamos  $\tilde{\zeta}$  la columna de las componentes de  $\tilde{X}$  en la base  $(J\tilde{f} \circ \tilde{c})$ . Así, tenemos

$$\tilde{X} \equiv (J\tilde{f} \circ \tilde{c}) \cdot \tilde{\zeta}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
X &= \tilde{X} \circ \psi \\
&= (J\tilde{f} \circ \tilde{c} \circ \psi) \cdot (\tilde{\zeta} \circ \psi) \\
&= (J\tilde{f} \circ \varphi \circ c) \cdot (\tilde{\zeta} \circ \psi) \\
&= (Jf \circ c) \cdot (J\tilde{\varphi} \circ \varphi \circ c) \cdot (\tilde{\zeta} \circ \psi) \\
&\Rightarrow \varsigma = (J\tilde{\varphi} \circ \varphi \circ c) \cdot (\tilde{\zeta} \circ \psi)
\end{aligned}$$

Sea explícitamente

$$\begin{pmatrix} \varsigma^1(t) \\ \varsigma^2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 \tilde{\varphi}^1 \circ \varphi \circ c & \partial_2 \tilde{\varphi}^1 \circ \varphi \circ c \\ \partial_1 \tilde{\varphi}^2 \circ \varphi \circ c & \partial_2 \tilde{\varphi}^2 \circ \varphi \circ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\zeta}^1(t) \circ \psi \\ \tilde{\zeta}^2(t) \circ \psi \end{pmatrix}$$

o también, componente por componente,

$$\varsigma^i = \sum_a (\tilde{\zeta}^a \circ \psi) (\partial_a \tilde{\varphi}^i \circ \varphi \circ c)$$

En la perspectiva riemaniana, esta igualdad va a servir a definir la relación de equivalencia entre esos dos representaciones.

**Definición**

Sea  $\tilde{g} : \tilde{U} \rightarrow R^{2 \times 2}$  un segundo tensor métrico de clase  $C^k$  equivalente a  $g$  via el cambio de parametro  $\varphi : U \rightarrow \tilde{U}$  de clase  $C^k$ . Sea  $\tilde{c} : \tilde{I} \rightarrow \tilde{U}$  una representación de arco de clase  $C^k$  relativa a  $\tilde{g}$ , equivalente a  $c$  en clase  $C^k$  via  $\psi : I \rightarrow \tilde{I}$ . Una representación de campo de vectores tangentes de clase  $C^l$  relativa a  $\tilde{g}$  y a  $\tilde{c}$ ,  $\tilde{\zeta} : \tilde{I} \rightarrow R^2$  es dicha equivalente a  $\varsigma$  en clase  $C^l$  si

$$\varsigma^i = \sum_a (\tilde{\zeta}^a \circ \psi) (\partial_a \tilde{\varphi}^i \circ \varphi \circ c) \tag{4.9}$$

**Definición**

Un campo de vectores tangente de clase  $C^l$  a un arco riemaniano de clase  $C^k$  al largo de un arco trazado de clase  $C^k$  es una clase de equivalencia de representaciones de campos de vectores tangentes de clase  $C^l$  por la relación anterior.

## 4.8 Derivada covariante

Una vez que tenemos esta noción de campo de vectores tangentes al largo de un arco trazado sobre un arco riemaniano, deseamos poder derivar tal campo para medir sus variaciones. Estaría preferable que la derivada sea un campo de misma naturaleza.

Consideramos de nuevo para tener una intuición de la noción de derivada covariante, un campo de vector tangentes al largo de un arco trazado en una sabana en  $E(R^3)$ . Si derivamos este campo ( usando como variable el parametro

usado para representar el arco), el resultado es un campo de vectores que no tiene ningun razon de ser tangente a la sabana.

Por ejemplo, tomamos los vectores tangentes unitarios a un paralelo de una esfera, parametrizado por la abscisa curvilinea: derivar este campo nos da, en cada punto, el vector curvatura del paralelo que es normal al paralelo y contenido en su plano.

La solución que vamos a adoptar para remediar a este problema es de proyectar sobre el plano tangente los vectores obtenidos por derivación. Vamos a llamar derivada covariante del campo de vectores tangentes a la sabana al largo del arco, la proyección ortogonal de la derivada usual sobre el plano tangente a la sabana.

En nuestro ejemplo; esta proyección nos da en cada punto del paralelo un vector tangente al meridiano de este punto.

Si como antes, el campo es

$$X(t) = \sum_a \zeta^a(t) \cdot \partial_a f(c(t))$$

$$\Rightarrow X'(t) = \sum_a (\zeta^a)'(t) \cdot \partial_a f(c(t)) + \sum_{b,d} \zeta^b(t) \cdot \partial_b \partial_d f(c(t)) \cdot (c^d)'(t)$$

La primera suma es en el plano tangente, la segundo no lo es como

$$\partial_b \partial_d f = \sum_a \Gamma_{bd}^a \partial_a f + h_{bd} \vec{u}$$

Asi la proyección ortogonal de  $\partial_b \partial_d f$  sobre el plano tangente es  $\sum_a \Gamma_{bd}^a \partial_a f$ . La derivada covariante vale entonces

$$\nabla_c X(t) = \sum_a \left( (\zeta^a)'(t) + \sum_{b,d} \Gamma_{bd}^a(c(t)) \cdot \zeta^b(t) \cdot (c^d)'(t) \right) \cdot \partial_a f(c(t))$$

De nuevo, vamos a usar esta relación como una definición riemanaiana de la derivada covariante.

**Definición**

Sea  $g$  un tensor métrico de clase  $C^k$  y sea  $c$  una representación de arco de clase  $C^k$  relativa a  $g$ . Sea  $\zeta$  una representación de campo de vectores tangentes de clase  $C^l$  relativa a  $g$  y a  $c$ . La derivada covariante de  $\zeta$  al largo de  $c$  es la representación de campo de vectores tangentes  $\nabla_c \zeta$  de componentes:

$$\nabla_c \zeta^i = (\zeta^i)' + \sum_{b,d} (\Gamma_{bd}^i \circ c) \cdot \zeta^b(t) \cdot (c^d)'$$

Ahora tenemos que responder a la pregunta de como la derivada covariante se transforma durante un cambio de representaciones. Para responder a eso, vamos a usar las siguientes relaciones:

$$X \equiv (Jf \circ c) \cdot \zeta = \left( (J\tilde{f} \circ \tilde{c}) \cdot \tilde{\zeta} \right) \circ \psi$$

Derivando esas dos expresiones y proyectando sobre el plano tangentes, obtenemos

$$\begin{aligned}
& \sum_i \left[ (\zeta^i)' + \sum_{b,d} (\Gamma_{bd}^i \circ c) \cdot \zeta^b(t) \cdot (c^d)' \right] \cdot (\partial_i f \circ c) = \\
& = \left( \left( \sum_i \left[ (\tilde{\zeta}^i)' + \sum_{b,d} (\tilde{\Gamma}_{bd}^i \circ \tilde{c}) \cdot \tilde{\zeta}^b(t) \cdot (\tilde{c}^d)' \right] \cdot (\partial_i \tilde{f} \circ \tilde{c}) \right) \circ \psi \right) \cdot \psi' \\
& = \left( \sum_i \left[ (\tilde{\zeta}^i)' + \sum_{b,d} (\tilde{\Gamma}_{bd}^i \circ \tilde{c}) \cdot \tilde{\zeta}^b(t) \cdot (\tilde{c}^d)' \right] \circ \psi \right) \cdot \psi' \cdot (\partial_i \tilde{f} \circ \varphi \circ c)
\end{aligned}$$

Como  $\partial_i \tilde{f} = \sum_a (\partial_a f \circ \tilde{\varphi}) \cdot \partial_i \tilde{\varphi}^a$ , entonces

$$(\partial_i \tilde{f} \circ \varphi \circ c) = \sum_a (\partial_a f \circ c) \cdot (\partial_i \tilde{\varphi}^a \circ \varphi \circ c)$$

Usando este resultado en la Ec. anterior, obtenemos

$$(\nabla_c \zeta)^i = \sum_a ((\nabla_{\tilde{c}} \tilde{\zeta})^a \circ \psi) \cdot \psi' \cdot (\partial_a \tilde{\varphi}^i \circ \varphi \circ c) \quad (4.10)$$

Esta relación va a definir como la derivada covariante se transforma bajo un cambio de parametro. No vamos a hacer la demostración formal de esta propiedad. Vamos nadamas a ver dos casos particulares interesantes.

1. Si no cambiamos el tensor métrico, entonces  $\varphi = I_U$  y  $c = \tilde{c} \circ \psi$  y usando Ec.(4.10), tenemos

$$(\nabla_{\tilde{c} \circ \psi} (\tilde{\zeta} \circ \psi))^i = \left( (\nabla_{\tilde{c}} \tilde{\zeta})^i \circ \psi \right) \cdot \psi'$$

2. Si cambiamos el tensor métrico pero no la representación  $c$ , obtenemos

$$(\nabla_c \zeta)^i = \sum_a ((\nabla_{\tilde{c}} \tilde{\zeta})^a) \cdot (\partial_a \tilde{\varphi}^i \circ \tilde{c})$$

El caso general puede ser reconstituido usando esos dos resulados.

Es util de disponer de unas reglas de calculo de las derivadas covariantes:

Proposición:

*Sea  $g$  un tensor métrico de clase  $C^k$  y sea  $c$  una representación de arco de clase  $C^k$  relativa a  $g$ . Sea  $\zeta$  y  $\chi$  dos representaciones de campos de vectores tangentes de clase  $C^l$  relativa a  $g$  y a  $c$ . Sea  $f: I \rightarrow R$  derivable y  $a, b \in R$ . En esas condiciones, tenemos*

1.  $\nabla_c (a\zeta + b\chi) = a\nabla_c \zeta + b\nabla_c \chi$

2.  $\nabla_c(f.\varsigma) = f' .\varsigma + f.\nabla_c\varsigma$
3.  $(\varsigma|\chi)'_{g\circ c} = (\nabla_c\varsigma|\chi)_{g\circ c} + (\varsigma|\nabla_c\chi)_{g\circ c}$

Ejemplos:

Nos damos un campo de vectores tangentes de clase  $C^1$  a un arco riemanoiano. Por eso, consideramos una representación  $\varsigma : U \rightarrow R^2$  de campo de vectores tangentes relativo a un tensor métrico  $g$ .

Consideramos también la curva de coordenadas  $x^2 = x_*^2$ , es representada por

$$c_{(-,x_*^2)} : U_{(-,x_*^2)} \rightarrow U : x^1 \rightarrow (x^1, x_*^2)$$

donde  $U_{(-,x_*^2)} = \{x^1 \text{ tal que } (x^1, x_*^2) \in U\}$ . La composición de  $\varsigma$  da una aplicación:

$$\varsigma \circ c_{(-,x_*^2)} : U_{(-,x_*^2)} \rightarrow R^2 : t \rightarrow \varsigma(t, x_*^2)$$

que representa la restricción del campo de vectores al largo de la curva de coordenadas.

La derivada covariante de  $\varsigma \circ c_{(-,x_*^2)}$  al largo de  $c_{(-,x_*^2)}$  que vamos a llamar **la primera derivada covariante parcial de  $\varsigma$**  que vamos a notar

$$(\nabla_1\varsigma)(x^1, x_*^2) \equiv \left( \nabla_{c_{(-,x_*^2)}}(\varsigma \circ c_{(-,x_*^2)}) \right)(x^1)$$

En el caso concreto donde  $g$  es la metrica de una sabana  $S$  en  $R^3$ ,  $\nabla_1\varsigma$  es la proyección sobre el plano tangente a  $S$  de la derivada parcial ordinaria  $\partial_1\varsigma$ .

Podemos hallar facilmente su expresión y obtenemos

$$\begin{aligned} \nabla_1\varsigma & : U \rightarrow R^2 \\ (x^1, x^2) & \rightarrow \nabla_1\varsigma^i(x^1, x^2) = \left( \partial_1\varsigma^i(x^1, x^2) + \sum_a \Gamma_{a1}^i(x^1, x^2) \cdot \varsigma^a(x^1, x^2) \right)_{1 \leq i \leq 2} \end{aligned}$$

O de otra manera,

$$(\nabla_1\varsigma)^i = \partial_1\varsigma^i + \sum_a \Gamma_{a1}^i \cdot \varsigma^a$$

De la misma manera, podemos componer  $\varsigma$  con

$$c_{(x_*^1, -)} : U_{(x_*^1, -)} \rightarrow U : x^2 \rightarrow (x_*^1, x^2)$$

Procedando de la misma manera que antes, eso va a darnos **la segunda derivada covariante parcial** del campo de vectores representado por  $\varsigma$ .

$$\begin{aligned} \nabla_2\varsigma & : U \rightarrow R^2 \\ (x^1, x^2) & \rightarrow \nabla_2\varsigma^i(x^1, x^2) = \left( \partial_2\varsigma^i(x^1, x^2) + \sum_a \Gamma_{a2}^i(x^1, x^2) \cdot \varsigma^a(x^1, x^2) \right)_{1 \leq i \leq 2} \end{aligned}$$

O de otra manera,

$$(\nabla_2\varsigma)^i = \partial_2\varsigma^i + \sum_a \Gamma_{a2}^i \cdot \varsigma^a$$

Ejemplos:

1. Tomamos para campo de vectores tangentes "la primera derivada parcial", es decir el campo representado por  $\zeta(x^1, x^2) = (1, 0)$ . Entonces, tenemos

$$\begin{aligned}\nabla_1 \zeta &= (\Gamma_{11}^1, \Gamma_{11}^2) \\ \nabla_2 \zeta &= (\Gamma_{12}^1, \Gamma_{12}^2)\end{aligned}$$

De la misma manera si  $\zeta(x^1, x^2) = (0, 1)$ , tenemos

$$\begin{aligned}\nabla_2 \zeta &= (\Gamma_{22}^1, \Gamma_{22}^2) \\ \nabla_1 \zeta &= (\Gamma_{12}^1, \Gamma_{12}^2)\end{aligned}$$

Si la representación del campo de vectores  $\zeta$  es de clase superior o igual a dos, podemos reiterar este proceso y calcular  $\nabla_2 \nabla_2 \zeta, \nabla_1 \nabla_1 \zeta$  o  $\nabla_1 \nabla_2 \zeta$ . Pero es importante de observar que al contrario de las derivadas parciales usuales, las derivadas parciales covariantes no conmutan en general!

$$\nabla_2 \nabla_1 \zeta \neq \nabla_1 \nabla_2 \zeta$$

2. Tomamos de nuevo  $\zeta(x^1, x^2) = (1, 0)$ , podemos hallar

$$\begin{aligned}\nabla_2 \nabla_1 \zeta &= (\partial_2 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^2, \partial_2 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{11}^2) \\ \nabla_1 \nabla_2 \zeta &= (\partial_1 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^2, \partial_1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2)\end{aligned}$$

Esos dos campos de vectores no parecen ser iguales. De hecho, podemos ilustrarlo en el caso de la esfera. En este caso, el tensor métrico es

$$g(x^1, x^2) = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \cos^2 x^1 \end{pmatrix}$$

Usando los simbolos de Christoffel correspondiente a esta metrica, obtenemos

$$\begin{aligned}\nabla_2 \nabla_1 (1, 0) &= 0 \\ \nabla_1 \nabla_2 (1, 0) &= (0, -1)\end{aligned}$$

El hecho que la diferencia  $\nabla_2 \nabla_1 \zeta - \nabla_1 \nabla_2 \zeta$  es diferente de cero es relacionado a la curvatura del arco de Riemann. Este punto deberia ser desarrollado en un curso ulterior.

## 4.9 Campos de vectores paralelos

Introducimos la noción importante de campos de vectores paralelos. Son campos de vectores que parecen equipolentes a los habitantes de la superficies cuando ellos recorren el arco al largo del cual el campo es definido.

### **Definición:**

*Un campo de vectores tangentes de clase  $C^l$  a un arco riemaniano de clase  $C^k$  al largo de un arco trazado de clase  $C^k$  es dicho campo de vectores paralelo si su derivada covariante es nula.*

### Notas:



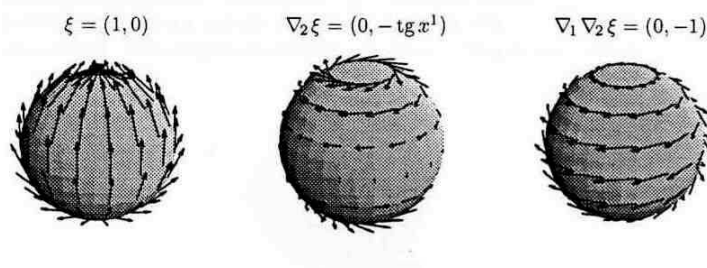


Figura 4.1:

1. la denominación "vectores paralelos" no es perfectamente adecuada por que en geometría afin, vectores paralelos son vectores multiples de uno del otro pero aqui, hablamos de vectores iguales.
2. Es facil de averiguar que si la derivada covariante es cero en una de las representaciones del campo de vectores tangentes es nula en cada representación equivalente. Entonces, la noción de campo de vectores paralelos es bien una propiedad del campo de vectores y no de la representación particular.
3. Los vectores de un campo de vectores paralelos son paralelos para los habitantes de la superficie! Pero si la estructura riemanaiana proviene de una superficie immersa en  $E(R^3)$  no los vemos necesariamente como vectores paralelos. Por ejemplo, los vectores tangentes unitarios a un gran circulo de la esfera forman un campo de vectores paralelos y en puntos diametralmente opuesto, los vectores del campos son de sentido opuesto.
4. Seria falso de imaginarse que un campo de vectores paralelos es una función constante:

$$\zeta : I \rightarrow R^2$$

De hecho,  $\zeta$  no es strictamente hablando un vector del campo pero mas correcto la colona de sus componentes en la base (fantasma) de sus derivadas parciales que son ellas en general no constantes. Es suficiente regresar a la definición de la derivada covariante para darse cuenta que  $\nabla_c \zeta = 0$  y  $\zeta = \text{constante}$  son en general propiedades independientes una del otro. Pero son bien equivalente si los simbolos de Christoffel son nulos al largo del arco.

#### Ejemplos:

Sobre la esfera de radio  $R$  centrada en el origen, consideramos el paralelo de latitud  $u_0$  ( $-\pi/2 < u_0 < \pi/2$ ). Al largo de este paralelo, consideramos el campo de vectores:

$$\zeta : R \rightarrow R^2 : t \rightarrow (1/R, 0)$$

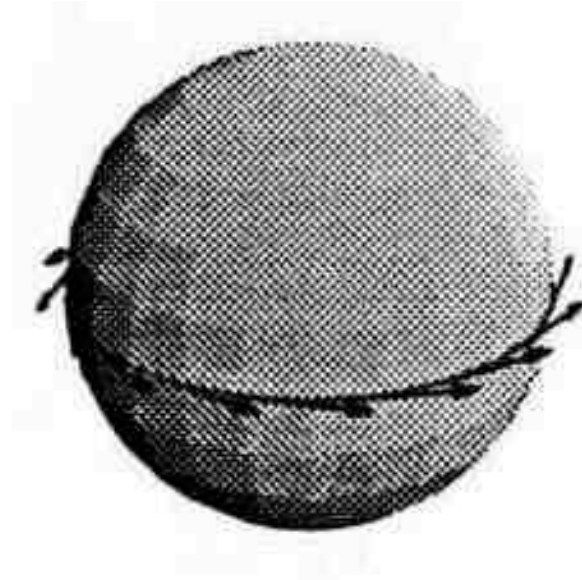


Figura 4.2:

Es en cada punto del paralelo, el vector tangente en la dirección del norte. Esos vectores son un campo de vectores paralelos? Para responder a este pregunta, podemos razonar en  $E(R^3)$ . El paralelo es representado por

$$p : R \rightarrow R^3 : t \rightarrow (R \cos u_0 \cos t, R \cos u_0 \sin t, R \sin u_0)$$

El campo de vectores es

$$X(t) = (-\sin u_0 \cos t, -\sin u_0 \sin t, \cos u_0)$$

Su derivada es

$$X'(t) = (\sin u_0 \sin t, -\sin u_0 \cos t, 0)$$

vector que es nulo si y solamente si  $u_0 = 0$ . Además, para  $u_0 \neq 0$ ,  $X'(t)$  es horizontal y no tiene una proyección nula sobre el plano tangente como este no es vertical. Así la derivada covariante de  $X$  es nula si y solamente si  $u_0 = 0$  es decir cuando el paralelo escogido es el ecuador. En los otros casos, el campo de vector no es un campo de vectores paralelos.

Hay todavía un punto a mencionar. Si nos damos sobre un arco riemanniano dos arcos trazados  $C$  y  $D$  con dos puntos comunes  $P$  y  $Q$ . Consideramos sobre cada de esos arcos, un campo de vectores paralelos, esos dos campos coinciden en el punto  $P$ , podemos deducir que esos dos campos van a coincidir en  $Q$ ? La respuesta es no!

Un ejemplo fácil a visualizar es el siguiente: la superficie es una esfera centrada en el origen. Los arcos  $C$  y  $D$  son respectivamente los meridianos contenidos en el plano  $Oxz$ , del lado de los  $x$  positivos y en el plano  $Oyz$  del lado

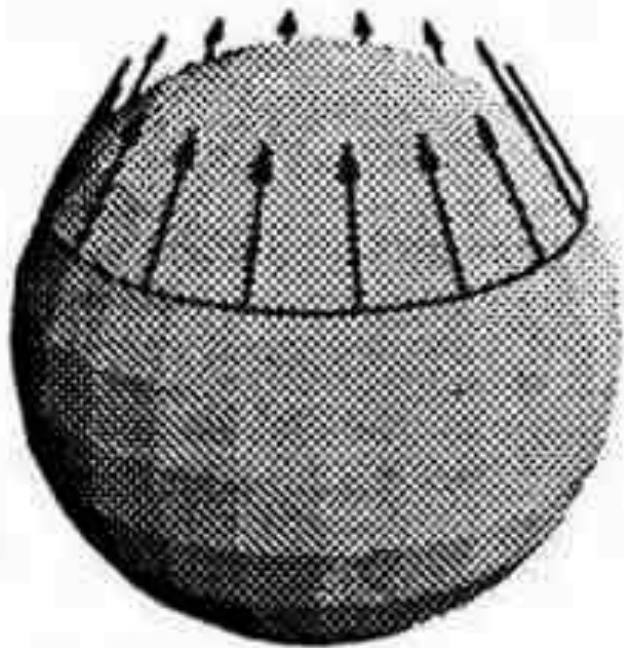


Figura 4.3:

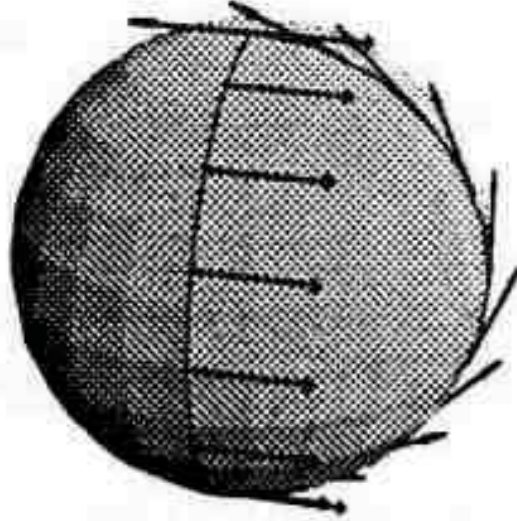


Figura 4.4:

de los  $y$  positivos.  $P$  es el polo sur y  $Q$  es el polo norte. En cada punto de  $C$ , plazamos un vector unitario dirigido al este y en cada punto de  $D$ , plazamos el vector unitario dirigido hasta el norte. En el polo sur, los vectores de los dos campos son iguales pero en el polo norte, los dos vectores son opuestos uno del otro.

Una vez mas, eso es relacionado a la curvatura del arco de Riemann.

Proposición:

Sea  $C$  un arco trazado sobre un arco riemanoiano, sea  $\varsigma$  y  $\chi : I \rightarrow R^2$  dos campos de vectores paralelos al largo de  $C$ . En esas condiciones, las funciones  $\|\varsigma\|_{g_{oc}}$  y  $(\varsigma|\chi)_{g_{oc}} : I \rightarrow R$  son constantes.

Demostración evidente usando las propiedades del producto escalar y de la derivada covariante.

Proposición:

Sea  $C$  un arco trazado sobre un arco riemanoiano, sea  $P$  un punto de  $C$  y  $v \in R^2$ . Existe un único campo  $\varsigma_v$  de vectores paralelos al largo de  $C$  tomando en  $P$  el valor  $v$ . Además, cualquier sea el punto  $Q$  de  $C$ , la aplicación de  $R^2 \rightarrow R^2$  que asocia a  $v$  el valor en  $Q$  del campo  $\varsigma_v$  sea

$$v \rightarrow \varsigma_v(Q)$$

es una isometria.

## 4.10 Curvatura geodesica

Definimos la curvatura geodesica en el capitulo anterior. La curvatura geodesica de un arco trazado sobre una sabana es la componente de la curvatura de este arco en la direcci3n del plano tangente a la curva. Aqui, para simplificar, no vamos a buscar a darlo un signo. Vamos siempre a tomarlo como la norma del vector de curvatura geodesica que es la proyecci3n del vector de curvatura sobre el plano tangente.

Consideramos sobre una sabana de  $E(R^3)$  representada por  $f : U \rightarrow R^3$  un arco dado por una representaci3n normal  $\bar{c} : J \rightarrow U$ . El vector de curvatura geodesica es la proyecci3n en el plano tangente del vector de curvatura del arco, es decir es la proyecci3n sobre el plano tangente de la derivada del vector tangente al arco. Entonces, es la derivada covariante del campo de vectores  $\vec{t}$  tangentes (unitarios) al arco.

$$\vec{\kappa}_g \equiv \nabla_{\bar{c}} \vec{t}$$

Cuanto a la curvatura geodesica (escalar), es la norma del vector anterior:

$$\kappa_g \equiv \left\| \nabla_{\bar{c}} \vec{t} \right\|$$

### Definici3n:

Sea  $\bar{c} : J \rightarrow U$  una representaci3n de clase  $C^2$  de un arco trazado, relativo a un tensor m3trico  $g : U \rightarrow R^{2 \times 2}$  normal en el sentido que  $\|\bar{c}\|_{g \circ c} = 1$ . La curvatura geodesica del arco representado por  $\bar{c}$  sobre el arco riemanniano representado por  $g$  es

$$\kappa_g \equiv \left\| \nabla_{\bar{c}} \bar{c}' \right\|_{g \circ \bar{c}}$$

Consideramos ahora relativamente al tensor m3trico  $g$ , una representaci3n de arco trazado,  $c : I \rightarrow U$  regular y de clase  $C^2$  y suponemos que esta representaci3n no es normal. Entonces, si escogimos  $t_0 \in I$ , y definiendo

$$\sigma(t) \equiv \int_{t_0}^t \left\| c' \right\|_{g \circ c}$$

entonces,  $\bar{c} \equiv c \circ \sigma^{-1}$  es una representaci3n normal de arco trazado relativo a  $g$ .

Si  $\varsigma : I \rightarrow R^2$  es una representaci3n de campo de vectores tangentes relativo a  $c$  y a  $g$ , la representaci3n correspondiente, relativa a  $\bar{c}$  y a  $g$  es  $\bar{\varsigma} \equiv \varsigma \circ \sigma^{-1}$ . Usando las reglas de transformaci3n de la derivada covariante, tenemos

$$\begin{aligned} \nabla_{\bar{c}} \bar{\varsigma} &= \nabla_{c \circ \sigma^{-1}} (\varsigma \circ \sigma^{-1}) \\ &= (\nabla_{c\varsigma} \circ \sigma^{-1}) \cdot (\sigma^{-1})' \\ &= (\nabla_{c\varsigma} \circ \sigma^{-1}) \cdot \frac{1}{\sigma' \circ \sigma^{-1}} \\ &= \left( \frac{1}{\sigma'} \cdot \nabla_{c\varsigma} \right) \circ \sigma^{-1} \\ &= \left( \frac{1}{\|c'\|_{g \circ c}} \cdot \nabla_{c\varsigma} \right) \circ \sigma^{-1} \end{aligned}$$

En particular, cuando  $\bar{\varsigma} = \overline{c'}$ ,

$$\begin{aligned}\varsigma &= \bar{\varsigma} \circ \sigma \\ &= \overline{c'} \circ \sigma \\ &= \frac{(\bar{c} \circ \sigma)'}{\sigma'} \\ &= \frac{c'}{\|c'\|_{g_{oc}}}\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\kappa_g &= \left\| \nabla_{\bar{c}} \bar{c}' \right\|_{g_{oc}} \\ &= \left\| \left( \frac{1}{\|c'\|_{g_{oc}}} \cdot \nabla_c \left( \frac{c'}{\|c'\|_{g_{oc}}} \right) \right) \right\|_{g_{oc}} \circ \sigma^{-1}\end{aligned}$$

o de otra manera,

$$\begin{aligned}\kappa_g \circ \sigma &= \left\| \left( \frac{1}{\|c'\|_{g_{oc}}} \cdot \nabla_c \left( \frac{c'}{\|c'\|_{g_{oc}}} \right) \right) \right\|_{g_{oc}} \\ &= \frac{1}{\|c'\|_{g_{oc}}} \left\| \nabla_c \left( \frac{c'}{\|c'\|_{g_{oc}}} \right) \right\|_{g_{oc}}\end{aligned}$$

Ejemplos:

Hallamos la curvatura geodesica de un paralelo, representado por  $c(t) \equiv (x_*^1, t)$  sobre la esfera de radio  $R$  y centrada en el origen. El tensor métrico es

$$g(x^1, x^2) = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \cos^2 x^1 \end{pmatrix}$$

Asi tenemos  $c'(t) = (0, 1)$  y entonces,  $\|c'(t)\|_{g_{oc}} = R \cos x_*^1$ . De alla, tenemos

$$\frac{c'}{\|c'\|_{g_{oc}}} = \left( 0, \frac{1}{R \cos x_*^1} \right)$$

y usando los simbolos de Christoffel, tenemos

$$\nabla_c \left( \frac{c'}{\|c'\|_{g_{oc}}} \right) = \left( \frac{\sin x_*^1}{R}, 0 \right)$$

Entonces,

$$\left\| \nabla_c \left( \frac{c'}{\|c'\|_{g_{oc}}} \right) \right\|_{g_{oc}} = |\sin x_*^1|$$

y entonces,

$$\begin{aligned}\kappa_g \circ \sigma &= \left\| \left( \frac{1}{\|c'\|_{g \circ c}} \cdot \nabla_c \left( \frac{c'}{\|c'\|_{g \circ c}} \right) \right) \right\|_{g \circ c} \\ &= \frac{|\tan x_*^1|}{R}\end{aligned}$$

Esta curvatura geodesica es nula solamente para el paralelo considerado en el ecuador.

## 4.11 Geódesicas

Las geodesicas son los arcos trazados sobre una sabana que, para los habitantes de esta sabana, parecen ser lineas rectas. Lo que significa que su curvatura geodesica son nula pero solamente su curvatura geodesica!

### Definición:

Un arco trazado sobre un arco riemanniano es una geodesica si su curvatura geodesica es nula en todo punto.

### Proposición:

Sea  $c : I \rightarrow U$  una representación de clase  $C^2$  de arco trazado, relativo a un tensor métrico  $g$ . Las dos siguientes proposiciones son equivalentes:

1. el arco representado por  $c$  es una geodesica y  $\|c'\|_{g \circ c}$  es una constante
2. Para  $i = 1, 2$

$$(c^i)'' + \sum_{a,b} (\Gamma_{ab}^i \circ c) \cdot (c^a)' \cdot (c^b)' = 0$$

Esas ecuaciones son conocidas como **las ecuaciones de Euler**.

### Demostración:

(1)  $\Rightarrow$  (2) : se demuestra directamente a partir de la definición de geodesica (y curvatura geodesica) y de la definición de la derivada covariante.

(2)  $\Rightarrow$  (1): Empezamos con la definición:

$$\|c'\|_{g \circ c}^2 = \sum_{a,b} (g_{ab} \circ c) \cdot (c^a)' \cdot (c^b)'$$

y derivando esta expresión y usando las propiedades de los simbolos de Christoffel. Y probamos que

$$\left( \|c'\|_{g \circ c}^2 \right)' = 0$$

Entonces,  $\|c'\|_{g \circ c} = cste = k$  y el mismo calculo que en la primera parte nos enseña que  $k^2 (\kappa_g \circ \sigma) = 0$

Sabemos que en el plano, por cada punto, pasa una y una única línea recta en cada dirección. La siguiente proposición generaliza esta propiedad a las geodesicas de un arco riemanniano.

Proposición:

*Sea  $S$  un arco riemanniano de clase  $C^2$ ; en cada punto de  $S$ , en cada dirección, existe uno y un único arco de geodesica trazado sobre  $S$  pasando por este punto y admitiendo un vector tangente paralelo a la dirección dada.*



## Capítulo 5

### Ejercicios.

1. Sea los vectores  $u = (1, 2, 3)$  y  $v = (-1, 4, 3)$  y el punto  $P = (0, 0, 1)$ .

- Verificar que  $u$  y  $v$  son linealmente independiente.
- Dar las ecuaciones vectoriales, paramétricas y cartesianas de la línea recta vectorial  $d_0$  apoyándose sobre el vector  $u$ , del plano vectorial  $\pi_0$  apoyándose sobre los vectores  $u$  y  $v$ .
- Dar las ecuaciones vectoriales, paramétricas y cartesianas de la línea recta afín  $d$  paralela a  $u$  y pasando por el punto  $P$ , y del plano afín  $\pi$  paralelo a  $u$  y  $v$  y pasando por el punto  $P$ .

2. Sea los puntos

$$A = (-1, 4, 3)$$

$$B = (1, 2, 3)$$

$$C = (0, 0, 1)$$

Hallar las ecuaciones vectorial, paramétricas y cartesianas de

- la línea recta  $d' = BC$
- del plan  $ABC$

3. Sea

$$A = (1, 2, 1)$$

$$B = (1, 0, 1)$$

$$C = (0, 2, 0)$$

$$D = (1, 3, -2)$$

Dar las ecuaciones vectoriales, paramétricas y cartesianas del plan  $P$  pasando por  $A$  y  $B$  y paralelo a  $CD$ .

4. Hallar las ecuaciones parametricas para los planes de ecuaciones:

- a)  $x + 3y - z - 2 = 0$
- b)  $x + y - 1 = 0$
- c)  $3x - y + 5z = 17$
- d)  $x - 5z = 17$
- e)  $3x - y = 0$
- f)  $y = -8$

5. Hallar las ecuaciones parametricas para las lineas rectas de ecuaciones

- a)  $\begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$
- b)  $\frac{x+1}{5} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+3}{3}$
- c)  $\frac{x-1}{3} = 1 - y = \frac{z+2}{4}$
- d)  $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$

6. Hallar las ecuaciones cartesianas de la linea recta paralela a  $d$  y pasando por el punto  $P$ :

- a)  $d \equiv \begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ x + y = 1 \end{cases} \quad P = (-1, 2, 2)$
- b)  $d \equiv \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t + 2 \\ z = t - 3 \end{cases} \quad P = (0, 0, 1)$

7. Determinar si los triplets  $(E, V, \overrightarrow{---})$  siguientes son espacios afines. Si la respuesta es afirmativa, dar la suma de un punto y de un vector:

- a)  $E = Z^2, V = R^2, \overrightarrow{(z_1, z_2)(z'_1 z'_2)} = (z'_1 - z_1, z'_2 - z_2)$
- b)  $E = R^3, V = R^3 : \overrightarrow{(x_1, x_2, x_3)(y_1, y_2, y_3)} = (k(y_1 - x_1), k(y_2 - x_2), k(y_3 - x_3))$
- c)  $E = R^3, V = R^3 : \overrightarrow{(x_1, x_2, x_3)(y_1, y_2, y_3)} = (y_2 - x_2, y_1 - x_1, y_3 - x_3)$
- d)  $E = R^3, V = R^2 : \overrightarrow{(x_1, x_2, x_3)(y_1, y_2, y_3)} = (y_1 - x_1, y_2 - x_2)$
- e)  $E = R^4, V = C^2 : \overrightarrow{(x_1, x_2, x_3, x_4)(y_1, y_2, y_3, y_4)} = ((y_1 - x_1) + i(y_3 - x_3), (y_4 - x_4) + i(y_2 - x_2))$
- f)  $E = C, V = C : \overrightarrow{zz'} = \overline{z' - z}$

8. Determinar si las siguientes aplicaciones son representaciones parametricas

de curvas o de arcos de curvas y determinar su clase:

- a)  $f : R \rightarrow R^2 : t \rightarrow (t^2, \cos t^2)$   
 b)  $f : R \rightarrow R^2 : t \rightarrow (|t|, \sin t)$   
 c)  $f : R \rightarrow R^2 : t \rightarrow \begin{cases} (t^2, t^2 \sin 1/t) & t > 0 \\ (t^2, 0) & t \leq 0 \end{cases}$   
 d)  $f : R_+^* \rightarrow R^2 : t \rightarrow \begin{cases} (\cos t, \sin t) & 2\pi \geq t > 0 \\ (1, t - 2\pi) & t > 2\pi \end{cases}$   
 e)  $f : ]-1, 1[ \rightarrow R^2 : t \rightarrow (0, t^n)$   
 f)  $f : ]-1, 1[ \rightarrow R^2 : t \rightarrow (t, t^n)$   
 g)  $f : [0, 2\pi] \rightarrow R^2 : t \rightarrow (\cos t/2, \sin t/2)$

9. Ponemos para cualquier  $n$  impar,  $f_n : R \rightarrow R^2 : t \rightarrow (t^n, t^m)$ , determinar si cuando  $m \neq n$  las representaciones parametricas  $f_m$  y  $f_n$  son equivalentes, en cual clase?
10. Buscar los puntos singulares de las representaciones parametricas siguientes:

- a)  $f : R \rightarrow R^2 : t \rightarrow (|t|, \sin t)$   
 b)  $f : R_+^* \rightarrow R^2 : t \rightarrow \begin{cases} (\cos t, \sin t) & 2\pi \geq t > 0 \\ (1, t - 2\pi) & t > 2\pi \end{cases}$   
 c)  $f : ]-1, 1[ \rightarrow R^2 : t \rightarrow (0, t^n)$   
 d)  $f : ]-1, 1[ \rightarrow R^2 : t \rightarrow (t, t^n)$

11. Representar graficamente la curva representada por

$$f : R \rightarrow R^2 : t \rightarrow (6 \sin t - 2 \sin 3t, 6 \cos t - 3 \cos 2t)$$

y hallar sus puntos singulares.

12. Determinar los puntos multiples de las curvas de  $R^2$  representadas por las ecuaciones implícitas siguientes. Dar las representaciones parametricas para cada una de ellas:

- a)  $xy = 0$   
 b)  $x^2 = 1$   
 c)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$   
 d)  $3axy = x^3 + y^3$   
 e)  $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$   
 f)  $(x^2 + 2ay - a^2)^2 = y^2(a^2 - x^2)$

13. Dar una ecuación implícita describiendo la curvas de siguientes representaciones parametricas:

- a)  $f : R \rightarrow R^2 : t \rightarrow (\cos 2t, \sin 2t)$   
 b)  $f : ]0, 2\pi[ \rightarrow R^2 : t \rightarrow (\cosh t, \sinh t)$   
 c)  $f : R \rightarrow R^2 : t \rightarrow (\cos t, \sin t)$   
 d)  $f : R \rightarrow R^2 : t \rightarrow (\frac{2at^2}{1+t^2}, \frac{2at^3}{1+t^2})$

14. Escribir la ecuación de la tangente en un punto regular cualquiera de la curva:

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$$

15. Determinar los puntos del elipsa

$$\begin{cases} x = 2 \cos t + \sin t \\ y = 2 \cos t - \sin t \end{cases}$$

en cuales la normal pasa por el origen.

16. Hallar la envolvente de las siguientes familias de curvas:

- de la familia de lineas rectas:

$$ax - y = a^2/2$$

- de la familia de circulos:

$$(x - a)^2 + y^2 - 2a = 0$$

- de las normales a la parabola:

$$y = (x/2)^2 - 1$$

- de la familia de circulos:

$$(x - a^3)^2 + y^2 = 1$$

- de la familia de hiperbola:

$$xy - y^2 - ax + (2a - 3)y = a^2 - 3a$$

- de la familia de conicas:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{1 - a} = 1$$

17. Hallar la longitud

- de un arco de la cicloida:

$$\begin{cases} x = R(t - \sin t) \\ y = R(1 - \cos t) \end{cases}$$

- de la cardioide

$$\begin{cases} x = a(2 \cos t - \cos 2t) \\ y = a(2 \sin t - \sin 2t) \end{cases}$$

18. Dar una representación paramétrica normal :

- de la "tractora"

$$\begin{cases} x = a(\cos t + \ln \tan(t/2)) \\ y = a \sin t \end{cases}$$

- del círculo de radio  $R$  centrado al origen.
- de la involuta del círculo:

$$\begin{cases} x = R(\cos t + t \sin t) \\ y = R(\sin t - t \cos t) \end{cases}$$

- de la espiral logarítmica:

$$\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}$$

19. Probar que la curvatura de un círculo de radio  $R$  es  $1/R$  en cualquier punto.
20. Hallar la curvatura de la parábola  $y = 2px^2$  en su vértice.
21. Hallar la curvatura de la elipse:

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$$

en sus vértices.

22. Hallar la curvatura de la espiral logarítmica en un punto cualquiera

$$\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}$$

23. Hallar la curvatura de una curva dada por su ecuación cartesiana  $y = f(x)$
24. Hallar la curvatura de una curva dada por su ecuación polar:  $r = f(\theta)$ .
25. Hallar la curvatura:

- de la estrofoida recta:

$$\begin{cases} x = a \frac{t^2-1}{t^2+1} \\ y = at \frac{t^2-1}{t^2+1} \end{cases}$$

en el punto  $(t = 0)$ .

- del "folium" de Descartes:

$$\begin{cases} x = \frac{3a}{2} \frac{(1-t^2)(1+t)}{3t^2+1} \\ y = \frac{3a}{2} \frac{(1-t^2)(1-t)}{3t^2+1} \end{cases}$$

en el origen.

- del mismo "folium" de Descartes en el punto 0.
- del "caracol" de Pascal:

$$\begin{cases} x = k \cos t + a \cos 2t \\ y = k \sin t + a \sin 2t \end{cases}$$

en el punto de intersección con su eje de simetría.

26. Dar una representación paramétrica de la evoluta del elipsa:

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$$

27. Hallar la evoluta de la espiral logarítmica:

$$\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}$$

28. Hallar la evoluta de la "tractora":

$$\begin{cases} x = a \left( \ln t + \frac{1-t^2}{1+t^2} \right) \\ y = \frac{2at}{1+t^2} \end{cases}$$

29. Dar una representación paramétrica normal para los arcos de curvas siguientes

$$\begin{cases} x = t^2/2 \\ y = \cos t + t \sin t \\ z = \sin t - t \cos t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2e^t(\sin t - \cos t) \\ y = 3e^t \\ z = -2e^t(\sin t + \cos t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2u \\ y = 7 - \frac{8}{3}u\sqrt{u} \\ z = -2u^2 \end{cases}$$

30. Para las curvas de representaciones paramétricas dadas, expresar en cualquier punto, el triedro de Frenet, la curvatura y la torsión:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ z = x^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \\ z = bt \end{cases}$$

31. Sea  $(\vec{t}(s), \vec{n}(s), \vec{b}(s))$  el triedro de Frenet de una curva. Demostrar que existe un vector  $w(s)$  llamado vector de Darboux tal que

$$\begin{aligned}\vec{t}' &= w \wedge \vec{t} \\ \vec{n}' &= w \wedge \vec{n} \\ \vec{b}' &= w \wedge \vec{b}\end{aligned}$$

32. Sea la curva

$$\begin{cases} x = \begin{cases} t^2 & t < 0 \\ 0 & t \geq 0 \end{cases} \\ y = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ t^2 & t > 0 \end{cases} \\ z = t \end{cases}$$

hallar si posible su triedro de Frenet, su curvatura y su torsion al origen.

33. Representar graficamente las superficies con las siguientes representaciones parametricas y determinar si esas representaciones parametricas son regulares.

$$\begin{aligned}a) \quad & f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (u, v) \rightarrow (u \cos v, u \sin v, v) \\ b) \quad & f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (u, v) \rightarrow (u \cos u, u \sin u, v) \\ c) \quad & f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (u, v) \rightarrow (u \cos u, v, u) \\ d) \quad & f : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 : (u, v) \rightarrow (u \cos v, u \sin v, u)\end{aligned}$$

34. Dar una ecuación implicita para las superficies con siguientes representaciones parametricas:

$$\begin{aligned}a) \quad & f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (u, v) \rightarrow (\cos u - \sin u, \cos u + \sin u, v) \\ b) \quad & f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (u, v) \rightarrow (v(\cos u - \sin u), v(\cos u + \sin u), v) \\ c) \quad & f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (u, v) \rightarrow (u, v + \sin u, v) \\ d) \quad & f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (u, v) \rightarrow (e^u \cos v, e^u \sin v, e^u \sin v) \\ e) \quad & f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (u, v) \rightarrow (a \cos^2 u, b \sin^2 v \sin^2 u, c \cos^2 v \sin^2 v)\end{aligned}$$

35. Determinar si la curva representada por

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 : t \rightarrow (t \cos t, t \sin t, t)$$

es trazada sobre

$$\begin{aligned}a) \quad & f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (u, v) \rightarrow (u \cos v, u \sin v, v) \\ b) \quad & f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (u, v) \rightarrow (u \cos u, u \sin u, v) \\ c) \quad & f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (u, v) \rightarrow (u \cos u, v, u) \\ d) \quad & f : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 : (u, v) \rightarrow (u \cos v, u \sin v, u)\end{aligned}$$

36. Probar que

$$\begin{cases} x = 1 + \cos \theta \\ y = \sin \theta \\ z = 2 \sin \theta / 2 \end{cases}$$

representa la intersección de la esfera

$$\begin{cases} x = 2 \cos u \cos v \\ y = 2 \cos u \sin v \\ z = 2 \sin u \end{cases}$$

y del cilindro

$$\begin{cases} x = 1 + \cos u \\ y = \sin u \\ z = v \end{cases}$$

(se llama la "ventana de Viviani).

37. Consideramos el cono

$$\begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v \\ z = u \end{cases}$$

y trazamos una curva  $C$  poniendo

$$\begin{cases} u = f(t) \\ v = t \end{cases}$$

determinar la función  $f$  de tal manera que las tangentes a  $C$  hacen un ángulo con el eje  $Oz$  igual a  $\arccos(1/\sqrt{6})$ .

38. Dar un vector normal y la ecuación del plano tangente a la superficie:

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u^2 - v^2 \end{cases}$$

en el punto de parametro  $(1, 1)$ .

39. Hallar el plano tangente en un punto cualquiera de

- del cono:  $z^2 = a^2(x^2 + y^2)$
- de la superficie representada por

$$\begin{cases} x = \cos^2 u \cos^2 v \\ y = \cos^2 u \sin^2 v \\ z = \sin^2 u \end{cases}$$

40. Hallar la primera forma fundamental de la helicóide:

$$\begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v \\ z = kv \end{cases}$$

- al origen



- en el punto de parametro  $(1, 0)$
- en el punto de parametro  $(2, \pi/2)$

41. Hallar la primera forma fundamental en un cualquier punto de la esfera:

$$\begin{cases} x = R \cos u \cos v \\ y = R \cos u \sin v \\ z = R \sin u \end{cases}$$

42. Hallar la primera forma fundamental en un cualquier punto de la paraboloides hiperbolica:

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u^2 - v^2 \end{cases}$$

43. Hallar la primera forma fundamental en un cualquier punto de la paraboloides eliptica:

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = (u/a)^2 - (v/b)^2 \end{cases}$$

44. Hallar la primera forma fundamental en un cualquier punto de la elipsoïda

$$\begin{cases} x = a \cos u \cos v \\ y = b \cos u \sin v \\ z = c \sin u \end{cases}$$

45. Hallar la primera forma fundamental en un cualquier punto del toro:

$$\begin{cases} x = (a + b \cos u) \cos v \\ y = (a + b \cos u) \sin v \\ z = b \sin u \end{cases}$$

46. Hallar la longitud del arco

$$\begin{cases} u = e^{kt} \\ v = t \end{cases}$$

trazado sobre la superficie

$$\begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v \\ z = u \end{cases}$$

entre los puntos de coordenadas  $(0, 0, 0)$  y  $(1, 0, 1)$ .

47. Hallar la longitud del arco

$$\begin{cases} u = \int_{\pi/4}^t \frac{dx}{\sin x} \\ v = t \end{cases}$$

trazado sobre la esfera

$$\begin{cases} x = \cos u \sin v \\ y = \sin u \sin v \\ z = \cos v \end{cases}$$

de  $t = 0$  a  $t = \pi$ .

48. Sobre la esfera del ejercicio anterior, consideramos la curva:

$$\begin{cases} u = \ln \cot(\frac{\pi}{4} - t/2) \\ v = \frac{\pi}{2} - t \end{cases}$$

y hallar su longitud entre los puntos de parametros  $t = 0$  y  $t = \pi/2$ .

49. Hallar la primera forma fundamental para una representación paramétrica de Monge:

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u, v) \end{cases}$$

estudiar en particular lo que paso en un punto estacionario de  $f$ .

50. Hallar la segunda forma fundamental de los ejercicios anteriores donde teniamos que hallar la primera forma fundamental.

51. Hallar la segunda forma fundamental para una representación paramétrica de Monge:

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u, v) \end{cases}$$

estudiar en particular lo que paso en un punto estacionario de  $f$ .

52. Hallar la curvatura normal del parabolóide hiperbolico:

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u^2 - v^2 \end{cases}$$

en el origen y en la dirección

- $(du, dv) = (1, 0)$
- $(du, dv) = (0, 1)$
- $(du, dv) = (1, 1)$

53. Hallar la curvatura normal en la superficie:

$$\begin{cases} x = (a + b \cos u) \cos v \\ y = (a + b \cos u) \sin v \\ z = b \sin u \end{cases}$$

en el punto de parametro  $(u, v)$  y en la dirección  $(du, dv)$ .

54. Hallar la curvatura normal de la helice

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \\ z = bt \end{cases}$$

sobre el helicoido:

$$\begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v \\ z = bv \end{cases}$$

55. Buscar los puntos umbilicales del paraboloido eliptico  $z = (x/a)^2 + (y/b)^2$ .

56. Describir la naturaleza de los puntos de la superficie de ecuación:  $z = x^2 - y^3$ .

57. Hallar la curvatura total de la superficie  $z = x^4 - y^4$  en el origen y en el punto  $(1, 1, 0)$  y deducir de eso la naturaleza de esos puntos.

58. Hallar la curvatura total en un punto cualquiera del toro.

59. Probar que la curvatura mediana del "catenoide":

$$\begin{cases} x = \cosh t \cos v \\ y = \cosh t \sin v \\ z = t \end{cases}$$

es nula en todo punto.

60. Hallar la curvatura total de la superficie de revolución:

$$\begin{cases} x = f(u) \cos v \\ y = f(u) \sin v \\ z = g(u) \end{cases}$$

61. Probar que la pseudo-esfera

$$\begin{cases} x = \frac{2au}{1+u^2} \cos v \\ y = \frac{2au}{1+u^2} \sin v \\ z = a(\ln u + \frac{1-u^2}{1+u^2}) \end{cases}$$

tiene una curvatura total constante y negativa.

62. Hallar la curvatura, la curvatura normal, la curvatura geodesica,

- de un paralelo de una superficie de revolución
- de un meridiano de una superficie de revolución.

63. Determinar si  $(U, g)$  dados son un mapa locale (otramente dicho si  $g : U \rightarrow R^{2 \times 2}$  representan un arco riemano) y determinar su clase

•

$$g : R^2 \rightarrow R^2 : (x^1, x^2) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & x^1 \\ -x^1 & 2 \end{pmatrix}$$

•

$$g : R \times R^* \rightarrow R^2 : (x^1, x^2) \rightarrow \begin{pmatrix} \sin(x^1/x^2) & \cos(x^1/x^2) \\ \cos(x^1/x^2) & \sin(x^1/x^2) \end{pmatrix}$$

•

$$g : R^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow R^2 : (x^1, x^2) \rightarrow \begin{pmatrix} 1/[(x^1)^2 + (x^2)^2] & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

•

$$g : R^2 \rightarrow R^2 : (x^1, x^2) \rightarrow \begin{pmatrix} [(x^1)^2 + (x^2)^2 + 4]^{-2} & 0 \\ 0 & [(x^1)^2 + (x^2)^2 + 4]^{-2} \end{pmatrix}$$

•

$$g : R^2 \rightarrow R^2 : (x^1, x^2) \rightarrow \begin{pmatrix} |x^1| & \frac{1}{2}x^1 \\ \frac{1}{2}x^1 & |x^1| \end{pmatrix}$$

•

$$g : R^2 \rightarrow R^2 : (x^1, x^2) \rightarrow \begin{pmatrix} x^1|x^1| & \frac{\sqrt{2}}{2}|x^1x^2| \\ \frac{\sqrt{2}}{2}|x^1x^2| & x^2|x^2| \end{pmatrix}$$

•

$$g : R_+^{*2} \rightarrow R^2 : (x^1, x^2) \rightarrow \begin{pmatrix} 4x^1|x^1| & 0 \\ 0 & 4x^2|x^2| \end{pmatrix}$$

64. Determinar  $\tilde{g}$  tal que  $\varphi : \tilde{U} \rightarrow U$  sea el cambio de parametros entre  $(U, g)$  y  $(\tilde{U}, \tilde{g})$ .

$$U : R^2 \setminus (R_+ \times \{0\}) = \{(x^1, x^2) | x^1 < 0 \text{ o } x^2 \neq 0\}$$

$$g : U \rightarrow R^{2 \times 2} : (x^1, x^2) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 + 4(x^1)^2 & 4x^1x^2 \\ 4x^1x^2 & 1 + 4(x^2)^2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{U} = R_+^* \times ]0, 2\pi[$$

$$\varphi : \tilde{U} \rightarrow U : (\tilde{x}^1, \tilde{x}^2) \rightarrow (x^1, x^2) = (\tilde{x}^1 \cos \tilde{x}^2, \tilde{x}^1 \sin \tilde{x}^2)$$

Determinar las clases de los dos mapeos y del cambio de variables.

65. Construir un mapa local (tensor métrico) representando :

- el plano "invertido"

$$\begin{cases} x = u/(u^2 + v^2) \\ y = v/(u^2 + v^2) \\ z = 0 \end{cases}$$

- la semi-esfera en representación de Monge:  $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$
- la esfera "estereografica":

$$\begin{cases} x = 4u/(u^2 + v^2 + 4) \\ y = 4v/(u^2 + v^2 + 4) \\ z = (u^2 + v^2 - 4)/(u^2 + v^2 + 4) \end{cases}$$

66. Hallar los simbolos de Christoffel de primera y segunda especie para las representaciones parametricas de

- la esfera
- el paraboloides hiperbolico
- el paraboloides eliptico
- el elipsoide
- el toro

67. Hallar los simbolos de Christoffel de primera especie y de segunda especie para una representación parametrica de Monge. Estudiar en particular lo que pasa en un punto estacionario de  $f$ .

68. Hallar el tensor de Riemann de segundo especie para las mapas locales

$$g : R^2 \rightarrow R^2 : (x^1, x^2) \rightarrow \begin{pmatrix} [(x^1)^2 + (x^2)^2 + 4]^{-2} & 0 \\ 0 & [(x^1)^2 + (x^2)^2 + 4]^{-2} \end{pmatrix}$$

69. Hallar el tensor de Riemann de segundo especie para las mapas locales

$$g : R^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow R^2 : (x^1, x^2) \rightarrow \begin{pmatrix} [(x^1)^2 + (x^2)^2]^{-2} & 0 \\ 0 & [(x^1)^2 + (x^2)^2]^{-2} \end{pmatrix}$$

70. Probar que

$$R_{ijkl} = \frac{1}{2} [\partial_j \partial_k g_{il} + \partial_i \partial_l g_{jl} - \partial_i \partial_k g_{jl} - \partial_j \partial_l g_{ki}] + \sum_{a,b} g^{ab} [\Gamma_{ila} \Gamma_{jkb} - \Gamma_{ika} \Gamma_{jlb}]$$

71. Probar las siguientes relación

- $R_{ijkl} = R_{klij}$
- $R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} = 0$
- $R_{jkl}^i + R_{klj}^i + R_{ljk}^i = 0$

72. Sobre el cilindro

$$\begin{cases} x = \cos u \\ y = \sin u \\ z = v \end{cases}$$

consideramos la elipse  $A$  representada por

$$\begin{cases} u = t \\ v = \sin t \end{cases}$$

Hallar la derivada covariante al largo de  $A$  de los campos de vectores tangentes siguientes

- $(0, 0, 1)$
- $(-\sin u, \cos u, 0)$

73. Sobre la esfera unidad representada por

$$f(u, v) \rightarrow \begin{cases} x = \cos u \cos v \\ y = \sin u \sin v \\ z = \sin u \end{cases}$$

Consideramos el campo de vectores tangentes  $T = \partial_1 f$ . Hallar

- su primera derivada covariante parcial al largo de las curvas  $v = cste$ .
- su segunda derivada covariante parcial a largo de las curvas  $u = cste$ .

74. Hallar la curvatura geodesica de un paralelo y de un meridiano de una superficie de revolución.

75. Hallar  $\kappa_g$  para una helice circular vista como trazada sobre un cilindro

76. Hallar  $\kappa_g$  para una helice circular vista como trazada sobre un helicóide.

77. Demostrar que las geodesicas de un cilindro (generalizado) son las helices generalizadas trazadas sobre este cilindro.

78. Escribir las ecuaciones diferenciales de las geodesicas para una representación de Monge.

79. Hallar las geodesicas de un cono de revolución.

80. Sea  $f(u, v)$  una representación de clase al menos igual a dos de un arco de superficie tal que  $E = E(u), F = 0, G = G(u)$

- Probar que las curvas  $v = cste$  son geodesicas.
- Determinar cual condición tiene que llenar una curva  $u = cste$  para ser una geodesica.

## Capítulo 6

# Bibliografía

En este capítulo, vamos a dar una lista de referencias que podría ser útil para profundir o ir mas alla de esas notas o para dar nueva luz sobre los conceptos estudiados en esas notas. Esta lista es lejo de ser exhaustiva y va ser completada y actualizada durante el curso mismo.

1. Theodore Frankel, "The geometry of physics", Cambridge University press (2004)  
Excelente libro que va mas alla de esas notas. Un libro de referencia!
2. Abraham Goetz, "Introduction to differential geometry", Addison Wesley (1970)  
Excelente libro que va de las nociones sencillas como curvas planas y curvas espaciales hasta geometría riemanniana y las tecnicas modernas de la geometría diferencial.
3. Alfred Gray, "Modern Differential geometry of curves and surfaces", CRC Press (1993)  
Un libro que va mas alla de esas notas en su presentación de la geometría diferencial. Tiene muchos programas Mathematica para ilustrar su contenido.
4. Martin M. Lipschutz, "Theory and problems of differential geometry", McGraw-Hill, N-Y (1969)  
Un bueno libro con problemas resueltos en detalles y contiene una rica colección de propiedades de curvas y superficie.
5. E.H. Lockwood, "A book of curves", Cambridge University press (1961)  
Un pequeño catalogo de curvas planas.
6. <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Curves/Curves.html>  
interesante sitio internet que presenta varios ejemplos de curvas planas.

7. M.P. do Carmo, "geometría diferencial de curvas y superficies", Alianza Universidad Textos 1990  
Un excelent libro que tiene ademas la ventaja de ser en español.
8. Chris J.Isham, "Modern differential geometry for physicists", World Scientific, 1999  
Un bueno libro que claramente va mucho mas alla del nivel de esas notas.