ALGEBRA LINEAL

David Delepine, Mauro Napsuciale, Simón Rodríguez

30 de octubre de 2005

Índice general

Capítulo 1

Espacios euclidianos

En unos espacios vectoriales, tal que el espacio usual, es posible de calcular la longitud de un vector o el angulo entre dos vectores usando el producto escalar. Esta noción es el tema de este capitulo.

1.1. Productos escalares

Definición 1 *Una forma bilineal simetrica sobre un espacio vectorial E sobre el campo $\mathbb{R}$ es una aplicación:*

$$(.|.) : E \times E \to \mathbb{R}$$

que satisface las siguientes condiciones:

1. *bilinealidad: Para cualquier $x, y, z \in E$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:*

$$\begin{aligned} (x\alpha + y\beta|z) &= \alpha(x|z) + \beta(y|z) \\ (z|x\alpha + y\beta) &= \alpha(z|x) + \beta(z|x) \end{aligned}$$

2. *simetria: para cualquier $x, y \in E$:*

$$(y|x) = (x|y)$$

Definición 2 *Un producto escalar es una forma bilineal simetrica que tiene además la siguiente propiedad:*

1. *definida positiva: para cualquier $x \in E, x \neq 0$,*

$$(x|x) > 0$$

La bilinealidad tiene por consecuencia que

$$(0|0) = 0$$

Un espacio con un producto escalar es llamado espacio euclidiano.

Otras notaciones son a veces usadas para el producto escalar, como por ejemplo

$$\begin{array}{rl} & x.y \\ & (x, y) \\ < & x, y > \\ < & x|y > \end{array}$$

Ejemplo 1 *El producto escalar usual sobre $\mathbb{R}^n$ es definido por*

$$((x_1, ..., x_n) \,|\, (x_{y1}, ..., y_n)) = x_1 y_1 + ... + x_n y_n$$

Ejemplo 2 *Otras formas bilineales simetricas pueden ser definidas de la siguiente manera sobre $\mathbb{R}^n$: sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simetrica, es decir tal que $A^t = A$. Notamos los elementos de $\mathbb{R}^n$ en columnas y definimos, para $x, y \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n\times 1}$,*

$$(x|y)_A = x^t.A.y$$

La bilinealidad de $(.|.)_A$ resulta de las propiedades del producto matricial y el hipotesis que A es simetrica nos asegura que

$$(x|y)_A = (y|x)_A$$

para cualquier $x, y \in \mathbb{R}^n$. Además para algunas elecciones de A, la forma $(.|.)_A$ es definida positiva y defino entonces un producto escalar sobre $\mathbb{R}^n$ diferente que el producto escalar usual.

Ejemplo 3 *En el espacio usual E_0 donde escogimos un punto de referencia 0, notamos $\|\vec{x}\|$ la longitud del vector $\vec{x}$. El producto escalar canonico es definido por*

$$(\vec{x}|\vec{y}) = \|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\| \cos\theta = \frac{1}{2}\left(\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 - \|\vec{x}\|^2 - \|\vec{y}\|^2\right)$$

donde θ es el angulo entre los vectores $\vec{y}$ y $\vec{x}$.

Ejemplo 4 *Sea $a_1, .., a_n \in \mathbb{R}$, escalares determinados. Podemos definir una forma bilineal simetrica sobre el espacio $\mathbb{R}[X]$ (espacio de los polinomios a coeficientes reales) definiendo*

$$(P|Q) = \sum_{i=1}^{n} P(a_i)Q(a_i)$$

para cualquier $P, Q \in \mathbb{R}[X]$.

Ejemplo 5 *Sea el conjunto $C([0,1], \mathbb{R})$ de las funciones continuas sobre el intervalo $[0,1]$, podemos definir un producto escalar por*

$$(f|g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

1.2. Normas y distancias

Definición 3 *en un espacio euclidiano E, definimos la norma de un vector x por*

$$\|x\| = \sqrt{(x|x)}$$

Proposición 1 *La aplicación $\|.\| : E \to \mathbb{R}$ satisface las condiciones que definen una norma (abstracta) al sentido de analisis, a saber*

1. $\|x\| \geq 0$
2. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3. $\|\alpha x\| = |\alpha|. \|x\|$
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
   para cualquier $x, y \in E, \alpha \in \mathbb{R}$.

Lemma 2 Desigualdad de Cauchy-Schwartz *: para cualquier $x, y \in E$*

$$|(x|y)| \leq \|x\| . \|y\|$$

Demostración. *Consideramos el vector $tx+y$ de E donde t es un parametro real variable. De la condición de ser definida positiva del producto escalar, tenemos*

$$(tx + y|tx + y) \geq 0$$

para cualquier t. Pero podemos desarrollar esta expresión usando la propiedad de bilinealidad del producto escalar, eso nos da

$$(tx+y|tx+y) = t^2(x|x) + 2t(x|y) + (y|y) \geq 0$$

eso significa que esta función de segundo grado en t no puede tener dos raices distinctas, entonces tenemos que tener

$$(x|y)^2 - (x|x)(y|y) \leq 0$$

■

Se usa el lema para demostrar la propiedad (4) de la proposición anterior.

Podemos tambien definir una noción de **distancia** entre dos vectores imponiendo la siguiente definición:

$$d(x,y) = \|x-y\|$$

para cualquier vectores x, y de E.

1.3. Bases ortonormadas

Definición 4 *Dos vectores x, y de un espacio euclidiano E son llamados ortogonales si $(x|y) = 0$. Una base $e = (e_1, ..., e_n)$ de un espacio euclidiano E es llamada ortogonal si todos los vectores de la base son ortogonal dos a dos:*

$$(e_i|e_j) = 0$$

si $i \neq j$.

Definición 5 *Además una base ortogonal que satisface:*

$$\|e_i\| = 1$$

para todos los valores de $i = 1, ..., n$ es llamada base ortonormada

Ejemplo 6 *Si $e = (e_1, ..., e_n)$ es una base ortogonal, entonces la succesión $e' = (e'_1, .., e'_n)$ definida por*

$$e'_i = \frac{e_i}{\|e_i\|}$$

es una base ortonormada.

El lema siguiente nos enseña que los productos escalares pueden expresarse de manera muy sencilla en función de las coordenadas de los vectores una vez que se escogio una base ortonormada.

Lemma 3 *Sea e una base ortonormada de un espacio euclidiano E. Para cualquier $x, y \in E$,*

$$(x|y) =_e (x)^t \cdot_e (y)$$

Demostración. *Sea $x = \sum_{i=1}^n e_i x_i$ y $y = \sum_{i=1}^n e_i y_i$ de tal manera que*

$$_e(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} ;_e (y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Usando la bilinealidad del producto escalar, tenemos

$$\begin{aligned} (x|y) &= \left(\sum_{i=1}^n e_i x_i | \sum_{j=1}^n e_j y_j \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n x_i (e_i|e_j) y_j \end{aligned}$$

pero como la base e es ortonormada, tenemos

$$(e_i|e_j) = \delta_{ij}$$

donde δ_{ij} es el simbolo de Kronecker.

$$\Rightarrow (x|y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

■

Aqui viene el resultado principal de esta sección:

Teorema 4 *Cualquier espacio euclidiano de dimensión finita admite una base ortonormada.*

Demostración. *Como podemos siempre normar los vectores de una base dividiendolos por su norma, es suficiente de probar la existencia de una base ortogonal. Si el espacio es de dimensión uno, el teorema es claro debido al* *hecho que cualquier base contiene un solo vector y es entonces ortogonal. Podemos suponer que la dimensión de E es mas grande o igual a 2 y razonar por inducción, es decir suponer ademas que el enunciado es verdadero para los espacios euclidianos de dimensiones inferior a la dimension de E. Sea $(e_1, ..., e_n)$ una base cualquiera de E. Para $i = 2, ..., n$, definimos*

$$e'_i = e_i - e_1 \frac{(e_1|e_i)}{(e_1|e_1)}$$

Esos vectores son definidos de manera a ser ortogonales a e_1. (es facil a averiguarlo explicitamente). Además la succesión $(e_1, e'_2, ..., e'_n)$ es obtenida a partir de la succesión $(e_1, ..., e_n)$ con operaciones elementales de tipo I. Entonces, esta succesión genera tambien el espacio E y es entonces una base de E. Por hipotesis de inducción, el sub-espacio $V = sev < e'_2, ..., e'_n >$ admite una base ortogonal $(e''_2, ..., e''_n)$ visto que es de dimensión $n - 1$. Cualquier vector de E es la suma de un multiplo de e_1 y de un vector de V. Entonces la succesión $(e_1, e''_2, ..., e''_n)$ genera E y es entonces una base de E. Vamos a demostrar que esta base es ortogonal. Como los vectores e''_i son combili de $e'_2, ..., e'_n$, son ortogonales a e_1. Además los vectores $e''_2, ..., e''_n$ son ortogonales dos a dos por construcción. Entonces, $(e_1, e''_2, ..., e''_n)$ es una base ortogonal de E. ■

Es important de notar que si e es una base ortonormada de un espacio euclidiano E de dimensión n, entonces, el isomorfismo ${}_e\gamma : E \to \mathbb{R}^n$ que a cualquier vector de E asocia sus coordenadas en la base e es una **isometria** de espacios euclidianos ($\mathbb{R}^n$ es definido con su producto escalar usual) en el sentido que el producto escalar de dos vectores de E es igual al producto escalar usual de sus coordenadas :

$$(x|y) =_e (x)^t \cdot_e (y)$$

para cualquier $x, y \in E$.

Ejercicio 1 *Demostrar que las siguientes aplicaciones son productos escalares*

1. $(.|.)_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : (x|y) \to \sum_{k=1}^n k x_k y_k$
2. $(.|.)_2 : \mathbb{R}[X]_{\leq n-1} \times \mathbb{R}[X]_{\leq n-1} \to \mathbb{R} : (P|Q) \to \sum_{i=1}^n P(a_i)Q(a_i)$ *donde a_i son reales determinados, dos a dos distinctos.*

3. $(.|.)_3 : C([0,1],\mathbb{R}) \times C([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R} : (f|g) \to \int_0^1 f(x)g(x)dx$

Ejercicio 2 *Demostrar que* $(.|.) : \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R} : (A,B) \to tr(A^tB)$ *es un producto escalar.*

Ejercicio 3 *Sea* S *es sub-espacio vectorial de* $\mathbb{R}^{n\times n}$ *formado de los matrices simetricas. Demostrar que* $(.|.) : S \times S \to \mathbb{R} : (A,B) \to tr(AB)$ *es un producto escalar.*

Ejercicio 4 *Determinar si* $(.|.) : \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R} : (A,B) \to tr(AB)$ *es un producto escalar.*

Ejercicio 5 *Consideramos la aplicación*

$$(.|.) : C(\mathbb{R},\mathbb{R}) \times C(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathbb{R} : (f,g) \to f(\pi)g(\pi) + f(\pi/2)g(\pi/2) + f(0)g(0)$$

demostrar que esta aplicacion no es un producto escalar. Sea V *el sub-espacio vectorial de* $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *generado por la función constante* 1*, la función sin y la función cos. Demostrar que la restricción* $(.|.)_V$ *de* $(.|.)$ *a* V *es un producto escalar.*

Ejercicio 6 *En* $\mathbb{R}^{2\times 2}$ *con el producto escalar definido por* $(A|B) = Tr(A^tB)$*, cual es el ortogonal del sub-espacio formado de las matrices simetricas.*

Ejercicio 7 *En* $\mathbb{R}[X]_{\leq 2}$ *con el producto escalar definido por*

$$(P|Q) = P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$$

cual es el ortogonal del sub-espacio $V = \{P \in \mathbb{R}[X]_{\leq 2} \text{ tal que } P(1) = 0\}$

1.4. Proyecciones ortogonales

En esta sección, vamos a limitarnos a espacios euclidianos de dimensión finita.

1.4.1. Definiciones

Definición 6 *Sea E un espacio euclidiano de dimensión finita. Para cualquier parte $V \subset E$, el ortogonal $V^\perp$ es el conjunto de todos los vectores ortogonales a todos los vectores de V :*

$$V^\perp = \{x \in E \text{ tal que } (x|v) = 0 \ \forall v \in V\}$$

Este conjunto es un sub-espacio vectorial de E.

Lemma 5 *Si V es un sub-espacio vectorial de base $(e_1, .., e_n)$, entonces*

$$V^\perp = \{x \in E \ \pitchfork (e_1|x) = ... = (e_n|x) = 0$$

Demostración. *La demostracion es dejada a la atencion de los lectores.* ■

La proyección ortogonal de un vector sobre un sub-espacio es definida por la siguiente proposición:

Proposición 6 *Sea V un sub-espacio de un espacio euclidiano E. Para cualquier $x \in E$, existe un y un unico vector $p \in V$ tal que $x - p \in V^\perp$. Además, si $(e_1, ..., e_r)$ es una base ortonormada de V, entonces*

$$p = \sum_{i=1}^{r} e_i(e_i|x)$$

El vector p es llamado la proyeccion ortogonal del vector x sobre el sub-espacio V.
Demostración. *La demostracion es dejada a la atencion de los lectores.* ■

Corollario 1 *Para cualquier sub-espacio vectorial V de un espacio euclidiano E de dimensión finita,*

$$E = V \oplus V^\perp.$$

y entonces,

$$\dim V^\perp = \dim E - \dim V$$

y además

$$(V^\perp)^\perp = V$$

Demostración. *La demostracion es dejada a la atencion de los lectores.* ■

1.4.2. Proceso de ortogonalizacion de Gram-Schmidt

La tecnica de las proyecciones ortogonales permite de contruir sistematicamente una base ortogonal a partir de cualquier base.

Sea $e = (e_1, ..., e_n)$ una base de un espacio euclidiano E y sea

$$V_k = sev < e_1, ..., e_k >$$

para $k = 1, ..., n$ de tal manera que $V_n = E$. Podemos proyectar cualquier vector de E ortogonalemente sobre todos los sub-espacios V_k.

Para $k = 2, ..., n$, sea $p_k \in V_{k-1}$, la proyección ortogonal de e_k sobre V_{k-1} y sea

$$u_k = e_k - p_k$$

y definimos $u_1 = e_1$.

Teorema 7 *La succesión $(u_1, ..., u_n)$ es una base ortogonal de E.*
Demostración. *la demostracion se hace por recurrencia.* ■

Un aspecto importante del teorema precedente es que podemos usarlo para obtener una base ortonormada de un espacio a partir de una base cualquiera. En efecto, para obtener el ultimo vector de la base ortogonal u_k de V_k, es suficiente de calcular la proyeccion ortogonal p_k de e_k sobre V_{k-1}. Pero, al momento de calcular esta proyeccion, conocemos ya una base ortogonal de V_{k-1}. Asi podemos calcular esta proyeccion con el ayuda de la formula de la proposicion anterior. Asi, explicitamente, definimos succesivemente:

$$\begin{aligned}
u_1 &= e_1 \\
q_1 &= \frac{u_1}{\|u_1\|} \\
u_2 &= e_2 - q_1(q_1|e_2) \\
q_2 &= \frac{u_2}{\|u_2\|} \\
u_3 &= e_3 - q_1(q_1|e_3) - q_2(q_2|e_3) \\
q_3 &= \frac{u_3}{\|u_3\|} \\
&\vdots \\
u_k &= e_k - q_1(q_1|e_k) - q_2(q_2|e_k) - ... - q_{k-1}(q_{k-1}|e_k) \\
q_k &= \frac{u_k}{\|u_k\|}
\end{aligned}$$

Podemos invertir esas relaciones y expresar los e_k en función de los q_k.

Corollario 2 *Sea q la base ortonormada obtenida usando el proceso de Gram-Schmidt a una base e de un espacio euclidiano E. La matriz de cambio de base ${}_q(I_E)_e$ es triangular superior con entradas diagonales no-ceros.*
Demostración. *Los calculos anteriores demostran que la matriz ${}_q(I_E)_e$ es*

$$
{}_q(I_E)_e = \begin{pmatrix} \|u_1\| & (q_1|e_2) & (q_1|e_3) & \cdots & (q_1|e_n) \\ 0 & \|u_2\| & (q_2|e_3) & \cdots & (q_2|e_n) \\ 0 & 0 & \|u_3\| & \cdots & (q_3|e_3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \|u_n\| \end{pmatrix}
$$

■