Contents

Vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

0.1 Introducción

Muchas nociones físicas comunes, tales como las fuerzas, velocidades y aceleraciones involucran una magnitud (el valor de la fuerza, velocidad o aceleración) y una dirección. Cualquier entidad que involucre magnitud y dirección se llama vector. Los vectores se representan por flechas en las que la magnitud de la flecha designa la magnitud y la dirección de la flecha representa la dirección del vector. En la mayoría de las situaciones físicas que involucren vectores, únicamente la magnitud y dirección del vector serán significativas; consecuentemente, consideraremos a los vectores con la misma magnitud y dirección como iguales, independientemente de sus posiciones relativas.

Muchas situaciones comunes sugieren que cuando dos vectores actúan simultáneamente en un punto, la magnitud del vector resultante (el vector obtenido sumando los dos vectores originales) no es necesariamente igual a la suma de las magnitudes de los dos vectores. Por ejemplo, un nadador que nada contra corriente con una velocidad promedio de 3.3 Km/h, siendo la velocidad de la corriente 1.6 Km/h, no avanzara con una velocidad de 4.8 Km/h. En este caso los movimientos del nadador y la corriente son contrarios y, por lo tanto la velocidad promedio del nadador es únicamente 1.6 Km/h. Si, por el contrario, el nadador avanza aguas abajo (a favor de la corriente), entonces su velocidad promedio es de 4.8 Km/h.

0.2 Vectores en $\mathbb{R}^2$

Representación geométrica

Un vector se representa geométricamente como un segmento de recta dirigido, cuyas características son su magnitud y dirección. Sean P y Q dos punto en el plano, así, el segmento dirigido de P a Q, denotado por $\overrightarrow{PQ}$, representa un vector (ver figura 1), a los punto P y Q se les llama punto inicial y punto terminal, respectivamente. Si dos segmentos de recta dirigidos $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{RS}$ tienen la misma magnitud y dirección, se dice que son equivalentes, sin importar donde estén localizados sus puntos iniciales. Nótese que el segmento $\overrightarrow{QP}$

tiene dirección contraria a $\overrightarrow{PQ}$ (ver figura 1) y por lo tanto representa un vector distinto.

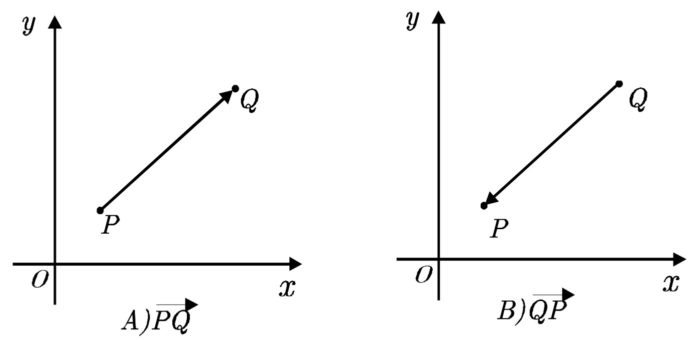


Figure 1: Los segmentos $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{QP}$ apuntan en direcciones opuestas

Definition 1 ***Definición geométrica de un vector.*** *El conjunto de todos los segmento de rectas dirigidos equivalentes recibe el nombre de vector. A todo segmento de recta dirigido en este conjunto se le llama* ***representación*** *del vector.*

Los vectores se denotan por letras en **negritas**, o bien, con una flecha sobre la letra, por ejemplo, $\mathbf{v}$ o $\overrightarrow{v}$.

Representación algebraica

De la definición 1, dado un vector $\mathbf{v}$ este se puede representar de muchas formas. En particular, sea $\overrightarrow{PQ}$ una representación de $\mathbf{v}$. Entonces, sin cambiar su magnitud y dirección $\overrightarrow{PQ}$ se puede desplazar paralelamente hasta que su punto inicial este situado en el origen (ver figura 2). Se obtiene así el segmento de recta dirigido $\overrightarrow{OR}$ que es otra representación de $\mathbf{v}$. Supóngase que ahora que las coordenadas cartesianas de R son (a, b). Entonces el segmento de recta dirigido $\overrightarrow{OR}$ se puede describir mediante las coordenadas (a, b). Es decir, $\overrightarrow{OR}$ es el segmento de recta dirigido con punto inicial $(0, 0)$ y punto terminal (a, b). Como un vector se puede describir mediante cualquiera de sus representaciones, el vector $\mathbf{v}$ se puede expresar como (a, b). Así tenemos la siguiente definición.

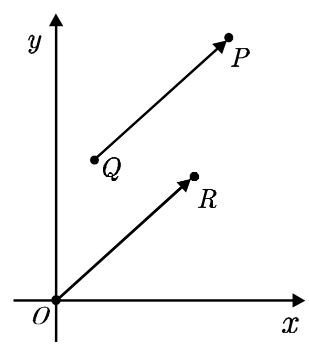


Figure 2: Traslación de $\overrightarrow{PQ}$ hasta que su punto inicial coincide con el origen.

Definition 2 ***Definición algebraica de un vector.*** *Un vector* $\mathbf{v}$ *en el plano* xy *es un par ordenado de números reales* (a, b)*. Los números* a *y* b *reciben el nombre de componentes del vector* $\mathbf{v}$*. El* ***vector cero*** *es el vector* $(0, 0)$.

La magnitud de un vector $\mathbf{v}$, denotada por $|\mathbf{v}|$, se define como la longitud de cualquiera de sus representaciones y su dirección es así mismo la dirección de cualquiera de sus representaciones. Empleando la representación $\overrightarrow{OR}$ y escribiendo el vector $\mathbf{v}$ en la forma (a, b) se tiene que

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{1}$$

como se puede ver de la figura 3 y usando el teorema de Pitágoras.

La dirección de un vector $\mathbf{v} =(a, b)$ es el ángulo θ, medido en radianes, que el vector forma con la parte positiva del eje x. por convención θ se elige de tal modo que $0 \leq \theta < 2\pi$. De la figura se ve que si $a \neq 0$, entonces

$$\tan \theta = \frac{b}{a}. \tag{2}$$

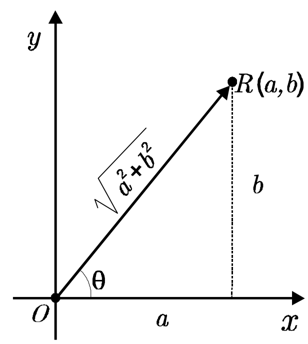


Figure 3: Magnitud del vector $v = (a, b)$.

Para encontrar el ángulo θ a partir de $\tan\theta$ es necesario especificar el cuadrante en donde se localiza el punto (a, b).

Example 3 *Calcular la magnitud y dirección de los vectores*

1. $(2, 2)$,
2. $(2, 2\sqrt{3})$,
3. $(-2\sqrt{3}, 2)$,
4. $(-3, -3)$,
5. $(6, -6)$,
6. $(0, 3)$.

1. $|\mathbf{v}| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$; $\tan\theta = 1$ y $(2, 2)$ está en el cuadrante I, entonces $\theta = \pi/4$.
2. $|\mathbf{v}| = \sqrt{2^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4 + 12} = 4$; $\tan\theta = \sqrt{3}$ y $(2, 2\sqrt{3})$ está en el cuadrante I, como $\tan\pi/3 = \sqrt{3}$, entonces $\theta = \pi/3$.
3. $|\mathbf{v}| = \sqrt{\left(-2\sqrt{3}\right)^2 + 2^2} = 4$; $\tan\theta = -1/\sqrt{3}$, como $\tan(\pi/6) = 1/\sqrt{3}$, pero $(-2\sqrt{3}, 2)$ está en el cuadrante II, el ángulo medido desde el eje x positivo es el ángulo deseado, es decir, $\theta = \pi - \pi/6 = 5\pi/6$.
4. $|\mathbf{v}| = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}$; $\tan\theta = 1$, $\tan(\pi/4) = 1$, pero $(-3, -3)$ está en el cuadrante III, entonces $\theta = \pi + \pi/4 = 5\pi/4$.

5. $|\mathbf{v}| = \sqrt{(6)^2 + (-6)^2} = 6\sqrt{2}$; $\tan\theta = -1$,$\tan(-\pi/4) = -1$, y $(6, -6)$ está en el cuarto cuadrante, entonces $\theta = 2\pi - \pi/4 = 7\pi/4$.

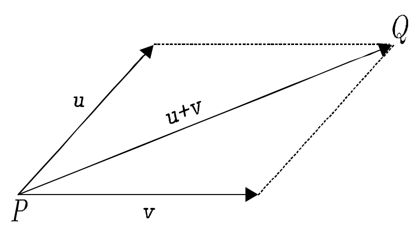
6. $|\mathbf{v}| = \sqrt{(3)^2} = 3$; en este caso $\tan\theta$ no está definida, como $(0, 3)$ es un punto localizado sobre el eje y positivo, entonces $\theta = \pi/2$.

En general, si $b > 0$, la dirección de $(0, b)$ es $\pi/2$ y la dirección de $(0, -b)$ es $3\pi/2$.

0.3 Operaciones con vectores en R^2.

Existen dos opraciones básicas con vectores en R^2: la suma de dos vectores y la multiplicación de un vector por un escalar.

Analizamos primero la suma de dos vectores **u** y **v**. Los experimentos en física muestran que los vectores se suman de acuerdo a la siguiente ley del paralelogramo (ver figura 0.3).



Ley del Paralelogramo para la suma de vectores. La suma de dos vectores **u** *y* **v** *que actuan sobre un mismo punto P es el vector que, en el paralelogramo que tiene a* **u** *y* **v** *por lados adyacentes, se representa por la diagonal que parte de P y llega a Q.*

Como los lados opuesto de un paralelogramo son paralelos y de igual longitud, el extremo Q de la flecha que representa a $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ también se puede obtener permitiendo que **u** actúe sobre P y posteriormente que **v** actúe sobre el extremo de **u**; o, de la misma manera, puede ser obtenido permitiendo que **v** actúe sobre P y luego **u** sobre el extremo de **v**. De este modo, dos vectores **u** y **v** que actúen sobre un mismo punto P pueden ser sumados "cola con cabeza"; esto es, se puede aplicar cualquiera de los vectores **u** o **v** en P y un vector que tenga la misma magnitud y dirección que el vector restante puede ser aplicado sobre el extremo del primero–el extremo de este segundo vector es el extremo de $\mathbf{u} + \mathbf{v}$.

La suma de vectores puede se descrita algebraicamente mediante el uso de la geometría analítica. Sean **u** y **v** los vectores definidos por $\mathbf{u} = (a_1, a_2)$ y $\mathbf{v} = (b_1, b_2)$obtiene a **u** y a **v**, introdúzcase un sistema de coordenadas con P por origen y sea (a_1, a_2) el extremo de **u** y (b_1, b_2) el de **v**. Entonces, tal como lo muestra la figura 4, las coordenadas de Q, extremo de $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, son (a_1+b_1, a_2+b_2). Es decir

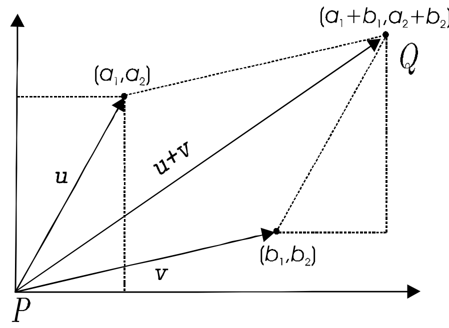


Figure 4: Suma algebraica de vectores

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \tag{3}$$

De aquí en adelante, cuando se haga referencia a las coordenadas del extremo de un vector, se considerará que el vector parte del origen. Mas aún, como un vector que principia en el origen queda completamente determinado por las coordenadas de su punto extremo, nos referiremos algunas veces al punto **u** en vez de al extremo del vector **u** cuando **u** sea un vector que parte del origen.

Como la distancia más corta entre dos punto es la linea recta (ver figuras 0.3 y 4), tenemos entonces que

Desigualadad del triángulo

$$|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}| \,. \tag{4}$$

Además de la operación de suma de vectores existe otra operación natural que se puede realizar con los vectores –la magnitud de un vector puede ser amplificada o reducida sin cambiar la dirección del vector. Esta operación, llamada multiplicación por un escalar, consiste en multiplicar un vector por un número real. Si el vector **u** está representado por una flecha, se tiene que para cualquier número real $t \geq 0$, el vector $t\mathbf{u}$ quedara representado por una flecha que tiene la misma dirección de la flecha que representa a **u**, pero su longitud será t veces mayor. Si $t < 0$, el vector $t\mathbf{u}$ quedara representado por una flecha cuya dirección sea la opuesta a la de **u** y con una longitud $|t|$ veces la longitud de la flecha que representa a **u**. Esto es

$$\begin{array}{l} \text{Dirección de } t\mathbf{u} = \text{Dirección de } \mathbf{u}, \text{ si } t > 0 \\ \text{Dirección de } t\mathbf{u} = \text{Dirección de } \mathbf{u}{+}\pi, \text{ si } t < 0 \end{array} \tag{5}$$

Dos vectores no nulos **u** y **v** se denominan paralelos si $\mathbf{u} = t\mathbf{v}$ para cualquier número real t no nulo. (Así, los vectores no nulos con direcciones iguales u opuestas son paralelos.)

Example 4 *Detererminar si los siguientes pares de vectores son paralelos*

1. $(3, 1)$ y $(6, 4)$.

2. $(5, -6)$ y $(-5, 6)$.
3. $(-3, 1)$ y $(9, -3)$.

Solution 5 *Para que dos vectores* $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$ *sean paralelos es necesario que* $\mathbf{u} = t\mathbf{v}$

1. Como no existe t tal que $(3, 1) = t(6, 4)$ ya que el sistema $3t = 6$ y $1t = 4$ no tiene solución, entonces $(3, 1)$ y $(6, 4)$ no son vectores paralelos.
2. Puesto que $(5, -6) = -1(-5, 6)$, estos dos vectores, $(5, -6)$ y $(-5, 6)$ son paralelos.
3. Como $(9, -3) = -3(-3, 1)$, $(-3, 1)$ y $(9, -3)$ son paralelos

Para describir algebraicamente la multiplicación por escalares, introdúzcase de nuevo un sistema de coordenadas en un plano que contenga al vector $\mathbf{u}$ tal que $\mathbf{u}$ parta del origen. Si el extremo de $\mathbf{u}$ tiene por coordenadas a (a_1, a_2), entonces puede mostrarse fácilmente que las coordenadas de $t\mathbf{u}$ son (ta_1, ta_2).

La operación de resta de vectores puede definirse en terminos de la suma de vectores y multiplicación de un vector por un escalar como

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-1\mathbf{v}). \tag{6}$$

Existen dos vectores especiales en R^2 que permiten expresar cuaquier vector de R^2 en forma practica. El vector $\mathbf{i} = (1, 0)$ y el vector $\mathbf{j} = (0, 1)$. Si $\mathbf{v} = (a_1, a_2)$ es cualquier vector en el plano, éste se puede expresar como, $\mathbf{v} = a_1(1, 0) + a_2(0, 1)$, entonces

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}. \tag{7}$$

Si un vector se escribe de esta forma se dice que está escrito en sus componentes horizontal y vertical. Los vectores $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ tienen dos propiedades interesantes

i Ninguno de ellos se puede expresar en términos del otro.

ii Cualquier vector se puede $\mathbf{v}$ en R^2 expresar en términos de los vectores $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$.

Se, dice que los vectores con estas características forman un **base,** en este caso una base de R^2.

Otra característica de los vectores $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ es que ambos tienen magnitud 1, $|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = 1$, esto motiva la siguiente definición.

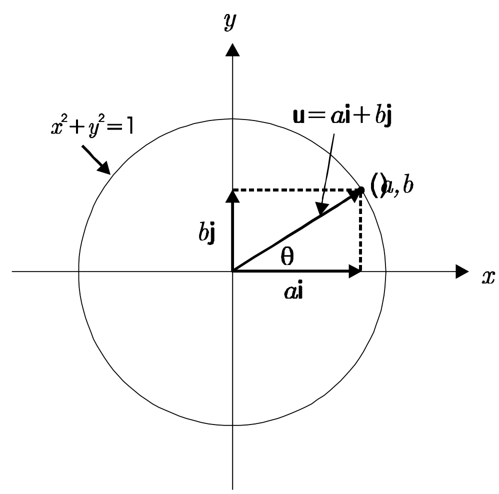
Definition 6 ***Vector unitario***. *Un vector unitario* $\mathbf{u}$ *es aquel que tiene magnitud* 1.

Example 7 *El vector* $\mathbf{u} = (1/2)\mathbf{i} + (\sqrt{3}/2)\mathbf{j}$ *es unitario, ya que*

$$|u| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

Sea $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$, un vecor unitario, entonces $\sqrt{a^2+b^2} = 1$, por lo que $a^2+b^2=1$ y $\mathbf{u}$ se puede representar mediante un punto situado sobre el círculo unitario (ver figura 0.3). Si la dirección de $\mathbf{u}$ está dada por θ, entonces, las componentes de $\mathbf{u}$, a y b son $a = \cos\theta$ y $b = \sin\theta$, es decir

$$\mathbf{u} = \cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j}. \tag{8}$$



Sea $\mathbf{v}$ cualquier vector distinto de cero. Entonces $\mathbf{u} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ es un vector unitario que tiene la misma dirección de $\mathbf{v}$. De aqui $\mathbf{v} = |\mathbf{v}|\,\mathbf{u}$, pero como $\mathbf{u}$ es unitario, entonces se puede escribir en la forma (8) y v es

$$\mathbf{v} = |\mathbf{v}|\,(\cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j}) \tag{9}$$

donde θ es la dirección de $\mathbf{v}$.

Encontrar la magnitud y dirección de los siguientes vectores

1. $\mathbf{v} = (-4, 4)$
2. $\mathbf{v} = (-5, 8)$
3. $\mathbf{v} = (1, -\sqrt{3})$
4. Sean $\mathbf{u} = (2, 3)$ y $\mathbf{v} = (5, -4)$. Calcule: a)$3\mathbf{u}$, b)$\mathbf{u} + \mathbf{v}$,c)$\mathbf{v} - \mathbf{u}$, d)$2\mathbf{u} - 7\mathbf{v}$. Dibujar los vectores.
5. Demuestre que si $\mathbf{u} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$ entonces $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (a_1 + b_1)\mathbf{i} + (a_2 + b_2)\mathbf{j}$.
6. Si $\mathbf{v} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$ es un vector distinto de cero, muestre que el vector $\mathbf{u} = \mathbf{v}/\left|\mathbf{v}\right|$ es unitario, encuentre las componentes de $\mathbf{u}$.
7. En el problema 4, encuentre un vector unitario para cada uno de los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{v} - \mathbf{u}$, y $2\mathbf{u} - 7\mathbf{v}$ que tengan la misma dirección de cada uno de ellos.
8. Muestre en forma algebraica que si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son dos vectores cualesquiera, entonces $\left|\mathbf{u} + \mathbf{v}\right| \leq \left|\mathbf{u}\right| + \left|\mathbf{v}\right|$. Sugerencia: si $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$ y $\mathbf{v} = (x_2, y_2)$, muestre que $2x_1x_2 + 2y_1y_2 \leq 2\left|\mathbf{u}\right|\left|\mathbf{v}\right|$.¿Bajo que condiciones se cumple la igualdad?

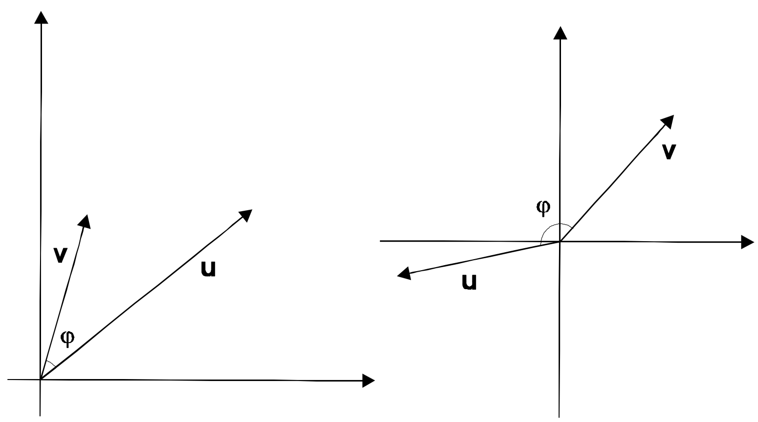
0.4 Producto Escalar y proyecciones en R^2

Definition 8 *Sean* $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$ *dos vectores,* $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$ *y* $\mathbf{v} =(x_2, y_2)$*, entonces, el producto escalar o punto se define por*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2 \tag{10}$$

Definition 9 ***Angulo entre dos vectores.*** *Sean* $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$ *y* $\mathbf{v} =(x_2, y_2)$ *dos vectores dieferentes de cero. Entonces el ángulo* φ *entre* $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$ *se define como el ángulo no negativo (en el intervalo* $[0, \pi]$*) más pequeño entre las representaciones de* $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$ *cuyos punto inciales se encuentran en el origen. Si* $\mathbf{u} = \alpha \mathbf{v}$ *siendo* α *álgun escalar, entonces se define* $\varphi = 0$*,si* $\alpha > 0$ *y* $\varphi = \pi$*,si* $\alpha < 0$.

La figura 0.4 ilustra este concepto.



Theorem 10 *Sea* $\mathbf{v}$ *un vector. Entonces*

$$|\mathbf{v}|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \tag{11}$$

Proof. Sea $\mathbf{v} = (a, b)$, entonces

$$|\mathbf{v}|^2 = a^2 + b^2 \tag{12}$$

y $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = (a, b) \cdot (a, b) = a^2 + b^2 = |\mathbf{v}|^2$. ■

Theorem 11 *Sean* $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$ *dos vectores diferentes de cero. Si* φ *es el ángulo entre ellos, entonces*

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|} \tag{13}$$

Proof. Considerese la figura 0.4, por el teorema de Pitágoras

$$\begin{aligned}|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 &= (|\mathbf{u}|+|\mathbf{v}|\cos\varphi)^2+|\mathbf{v}|^2\sin^2\varphi \\ &= |\mathbf{u}|^2+2\,|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\cos\varphi+|\mathbf{v}|^2\cos^2\varphi+|\mathbf{v}|^2\sin^2\varphi \\ |\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 &= |\mathbf{u}|^2+|\mathbf{v}|^2+2\,|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\cos\varphi.\end{aligned}$$

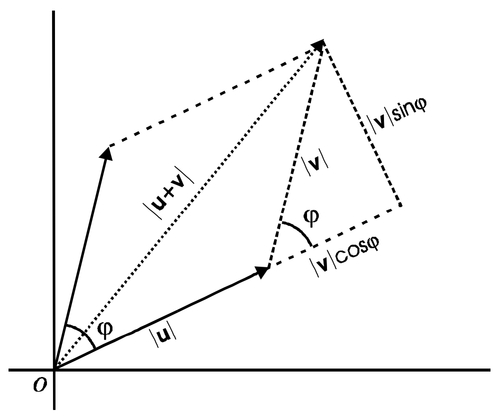
Por otra lado, del teorema anterior

$$\begin{aligned}|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 &= (\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \\ |\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 &= |\mathbf{u}|^2+2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}+|\mathbf{v}|^2\end{aligned}$$

de donde

$$|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\cos\varphi = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}. \tag{14}$$

■



La ecuación (14) se puede usar para definir el producto escalar como

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\cos\varphi$$

Example 12 *Hallar el ángulo entre los vectores* $\mathbf{u}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}$ *y* $\mathbf{v}=-7\mathbf{i}+\mathbf{j}$.

Solution 13 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{-14+3=-11}$; $|\mathbf{u}|=\sqrt{13}$, $|\mathbf{v}|=\sqrt{50}$. *entonces*

$$\cos\varphi=\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|}=\frac{-11}{\sqrt{13}\sqrt{50}}=\frac{-11}{\sqrt{650}}=-0.435$$

y por lo tanto

$$\varphi=\cos^{-1}(-0.435)\approx 2.0169\,(\approx 115.6^\circ)$$

Otra forma de definir cuando dos vectores son paralelos es la sigueinte.

Definition 14 ***Vectores paralelos.*** *Dos vectores* **u** *y* **v** *diferentes de cero se dicen paralelos si el ángulo entre ellos es cero o* π. *Adviertase que dos vectores paralelos pueden tener direcciones iguales u opuestas.*

Example 15 *Muestre que los vectores* $\mathbf{u}=(2,-3)$ *y* $\mathbf{v}=(\mathbf{-4},\mathbf{6})$ *son paralelos.*

Solution 16

$$\cos\varphi=\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|}=\frac{-26}{\sqrt{13}\left(2\sqrt{13}\right)}=-1$$

por lo tanto $\varphi=\pi$, *de tal modo que* $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$ *tienen direcciones opuesta.*

Theorem 17 *Si* $\mathbf{u}\neq\mathbf{0}$, *entonces* $\mathbf{v}=\alpha\mathbf{u}$ *para alguna constante* $\alpha\neq 0$ *si y sólo si* $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$ *son paralelos.*

Proof. *Sopongase que* $\mathbf{u}\neq\mathbf{0}$ *y* $\mathbf{v}=\alpha\mathbf{u}$, *entonces*

$$\begin{aligned}\cos\varphi&=\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|}\\&=\frac{\alpha\,|\mathbf{u}|^2}{|\mathbf{u}|\,|\alpha\mathbf{u}|}\\&=\frac{\alpha\,|\mathbf{u}|^2}{|\alpha|\,|\mathbf{u}|\,|\mathbf{u}|}\\\cos\varphi&=\frac{\alpha}{|\alpha|}=\pm1\end{aligned}$$

dependiendo del signo de α, *de aqui se tiene que* $\varphi=0$ *o* π.
Supongase ahora que $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$ *son paraleos de acuerdo con la definición 14, entonces el ángulo entre* $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$ *es cero o* π, *esto es,* $\cos\varphi=\pm1$, *en cualquier caso*

$$\cos^2\varphi=1=\frac{(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2}{(|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|)^2}.$$

Sea $\mathbf{u}=(x_1,y_1)$ *y* $\mathbf{v}=(x_2,y_2)$, *entonces*

$$(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2=(x_1x_2+y_1y_2)^2$$

y

$$\begin{aligned}(|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|)^2&=\left(x_1^2+y_1^2\right)\left(x_2^2+y_2^2\right)\\&=x_1^2x_2^2+x_1^2y_2^2+y_1^2x_2^2+y_1^2y_2^2\end{aligned}$$

y como $(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2=(|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|)^2$

$$x_1^2x_2^2+2x_1x_2y_1y_2+y_1^2y_2^2=x_1^2x_2^2+x_1^2y_2^2+y_1^2x_2^2+y_1^2y_2^2$$

que se reduce a

$$x_1^2y_2^2-2x_1x_2y_1y_2+y_1^2x_2^2=0$$

o

$$(x_1y_2-x_2y_1)^2=0$$

lo cual implica que

$$x_1y_2-x_2y_1=0$$

o bien

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \alpha.$$

Esto es, el vector $\mathbf{v} = (x_2, y_2) = (\alpha x_1, \alpha y_1) = \alpha\mathbf{u}$. ■

Definition 18 *Vectores ortogonales. Dos vectores* $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$ *se dicen ortogonales (o perpendiculares) si el ángulo entre ellos es* $\pi/2$.

Example 19 ***Dos vectores ortogonales***. *Muestre que los vectores* $\mathbf{u} = 3\mathbf{i}-4\mathbf{j}$ *y* $\mathbf{v} = 4\mathbf{i}+3\mathbf{j}$ *son ortogonales*

Solution 20 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 3\cdot 4 - 4\cdot 3 = 0$. *Por lo tanto,* $\cos\varphi = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} = 0$ *y como* φ *está en el intervalo* $[0,\pi]$, *entonces* $\varphi = \pi/2$.

Theorem 21 *Los vectores* $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$ *son ortogonales si y sólo si* $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{0}$.
Proof. *Supóngase que* $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$ *son distintos de cero y ortogonales, esto es,* $\varphi = \pi/2$, $|\mathbf{u}| \neq 0$ *y* $|\mathbf{v}| \neq 0$, *como* $\cos(\pi/2) = 0$

$$\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|\,|\mathbf{u}|} = 0 \tag{15}$$

y $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{0}$.
Por otro lado, si $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{0}$, *y* $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$ *son distinto de cero. Entonces* $|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \neq 0$ *y*

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|} = 0 \tag{16}$$

como φ *está comprendido en el intervalo* $[0,\pi]$, *la solución de la última ecuación es* $\varphi = \pi/2$. *Esto es,* $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$ *son ortogonales.* ■

Example 22 ***Hacer que los siguientes vectores sean paralelos u ortogonales.*** *Sean* $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ *y* $\mathbf{v} = 3\mathbf{i}+\alpha\mathbf{j}$. *Determinar* α *tal que i)* $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$ *sean ortogonales. ii)* $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$ *sean paralelos.*

i) Se tiene que $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 3+4\alpha$. *Si* $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$ *son ortogonales, entonces* $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0 = 3+4\alpha$, *esto implica que* $\alpha = -3/4$.

1. *En este caso debe cumplirse que* $\varphi = 0$ *o* π, *es decir,* $\cos^2\varphi = 1$, *esto implica que*

$$\left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|}\right)^2 = 1$$
$$(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2 = |\mathbf{u}|^2\,|\mathbf{v}|^2$$
$$(3+4\alpha)^2 = (17)\left(9+\alpha^2\right)$$
$$9 + 24\alpha + 16\alpha^2 = 17\cdot 9 + 17\alpha^2$$
$$\alpha^2 - 24\alpha + 16\cdot 9 = 0$$

Las solución a esta ecuación es $\alpha = 12$.

Theorem 23 *Sea* $\mathbf{v}$ *un vector distinto de cero. Entonces, si* $\mathbf{u}$ *es un vector cualquiera, el vector*

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v} \tag{17}$$

es ortogonal a $\mathbf{v}$.

Proof.

$$\mathbf{w}\cdot\mathbf{v} = \left(\mathbf{u} - \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v}\right)\cdot\mathbf{v} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} - \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})$$

$$= \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} - \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)|\mathbf{v}|^2 = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} - \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

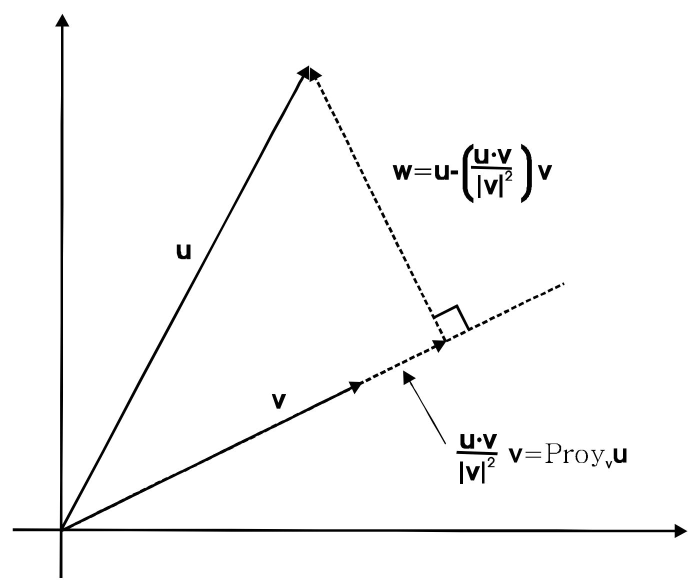
■

Definition 24 *Sean* $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$ *vectores diferentes de cero. La* ***proyeccción*** *de* $\mathbf{u}$ *sobre* $\mathbf{v}$, *denotado por* $proy_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$, *se define por*

$$proy_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v} \tag{18}$$

La componente de $\mathbf{u}$ *en la direccion de* $\mathbf{v}$ *es* $\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$.

Adviértase que $\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ *es un vector unitario en la dirección de* $\mathbf{v}$.



Los vectores $\mathbf{v}$ y $proy_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$ son paralelos, mientras que $\mathbf{u} - proy_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$ es ortogonla a $\mathbf{v}$,esto se ve de que $\mathbf{u} - proy_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v}$. En la figura 0.4 se ilustran estos conceptos.

Example 25 *Sean* $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ *y* $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$. *La proyección de* $\mathbf{u}$ *sobre* $\mathbf{v}$ *es*

$$\begin{aligned} proy_{\mathbf{v}}\mathbf{u} &= \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v} \\ &= \frac{5}{2}(\mathbf{i}+\mathbf{j}) \\ proy_{\mathbf{v}}\mathbf{u} &= \frac{5}{2}\mathbf{i}+\frac{5}{2}\mathbf{j} \end{aligned}$$

0.5 Vectores en R^3

Al igual que los puntos en el plano se representan como pares ordenados de números reales, un punto en el espacio se representa por medio de una **terna odenada** de números reales

$$(a, b, c). \tag{19}$$

Asi como los puntos en el plano representan vectores en R^2, las ternas ordenadas de números reales representan vectores en R^3. Para representar puntos en el espacio se elige ptimero un punto en R^3 llamandolo origen, y se denota por O. Luego, a partir del origen se dibujan tres ejes mutuanmente perpendiculares, llamados **eje** x, **eje** y y **eje** z. La forma más comun de elejir estos ejes es aquella en donde los ejes x y y son orizontales y el eje z vertical. En cada eje se elije una dirección positivo y la unidad de distancia. En la figura se muestran dos formas de elejir el sistema coordenado.Los tres ejes del sistema coordenado determinan

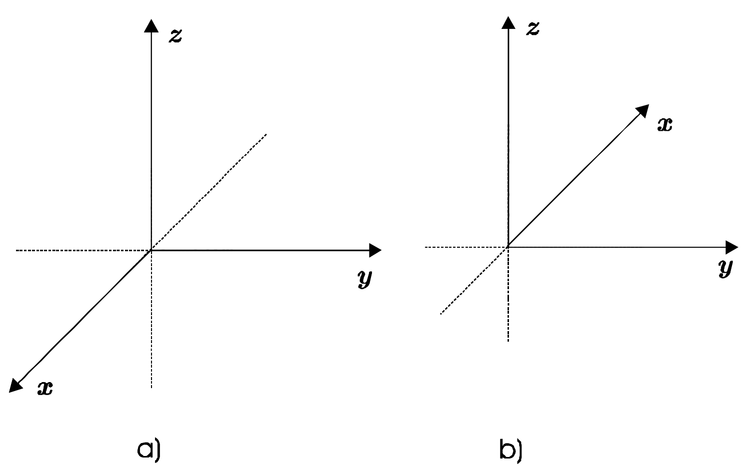


Figure 5: a) Sistema coordenado de mano derecha. b) Sistema coordenado de mano izquierda.

tres planos coordenados, a los cuales se llamarán planos-xy, pano-yz, plano-xz.

Con la construcción del sistema coordenado ahora es posible describir cualquier punto en R^3 de forma única:

$$P = (x, y, z). \tag{20}$$

Al sistema descrito se le llama sistema de coordenadas rectangulares o cartesianas

Theorem 26 *Sean $P = (x_1, y_1, z_1)$ y $Q = (x_2, y_2, z_2)$ dos puntos en el espacio. Entonces, la distancia entre P y Q, $\overline{PQ}$, está dad por*

$$\overline{PQ} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \tag{21}$$

Los vectores en R^3 se definen, al igual que en R^2, como segmento de recta dirigidos en el espacio, todos los segmentos de recta dirigidos, con la misma dirección y longitud, son representaciones de un mismo vector.

Por comodidad se consideran las representaciones de los vectores cuyo punto inicial es el origen. De esta manera el vector queda determinado uniamente por las coordenadas del punto terminal, sean (x, y, z) las coordenadas de este punto, entonces $\mathbf{v} = (x, y, z)$ y $|\mathbf{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Al igual que en los vectores en R^2, en los vectores en R^3 también existen las operaciones de suma de dos vectores y multiplicación de un vector por un escalar con las mismas interpretaciones. Estas se definen por:

Definition 27 *Sean $\mathbf{u} = (x_1, y_1, z_1)$ y $\mathbf{v} =(x_2, y_2, z_2)$ vectores en R^3*

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

y

$$\alpha\mathbf{u} = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)$$

Un vector unitario es un vector cuya magnitud es 1. Si $\mathbf{v}$ es cualquier vector distinto de cero, $\mathbf{u} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ es un vector unitario.

Example 28 *Encuentre un vector unitario cuya dirección sea la misma de $\mathbf{v} =(2, 4, -3)$.*

Solution 29 *Como $|\mathbf{v}| = \sqrt{2^2 + 4^2 + (-3)^2} = \sqrt{29}$, entonces $\mathbf{u} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ es*

$$\mathbf{u} = (2/\sqrt{29}, 4/\sqrt{29}, -3/\sqrt{29})$$

En el caso de los vetores en R^3 la dirección de un vector no se puede definir simplemente por el ángulo θ que forma el vector con la parte positiva del eje x, por ejemplo, $0 < \theta < 2\pi$, entonces existe un número infinito de vectores que forman un ángulo θ con la parte positiva del eje x, como se ve en la figura 6.Entonces, no basta este ángulo para definir la dirección de un vector, es lugar de este ángulo definiremos la dirección de un vector en R^3 en términos del vector unitario en la misma dirección del vector original.

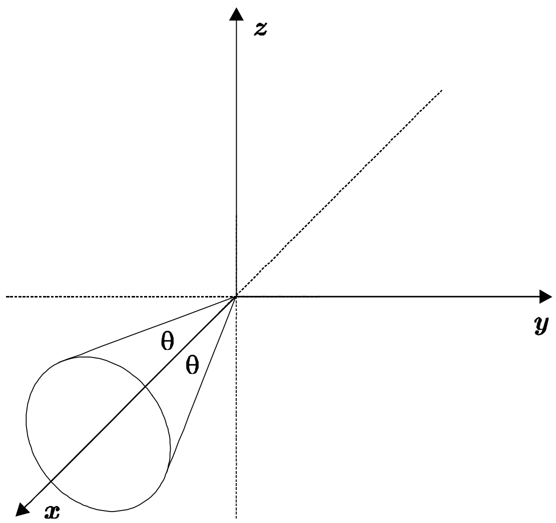


Figure 6: Todos los vectores sobre el cono forman un angulo θ con la parte positiva del eje x

Definition 30 *La dirección de un vector* $\mathbf{v}$ *en* R^3 *se define como el vector unitario* $\mathbf{u} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$.

Resulta conveniente definir la dirección de un vector en términos de algunos ángulos. Sea $\mathbf{v}$ el vector $\overrightarrow{OP}$ ilustrado en la figura, se definen los ángulos α como el ángulo entre $\mathbf{v}$ y la parte positiva del eje x, β como el ángulo entre $\mathbf{v}$ y la parte positiva del eje y y γ como el ángulo entre $\mathbf{v}$ y la parte positiva del eje z, vease la figura **??**. Los ángulos α, β, γ reciben el nombre de ángulos de direción o ángulos directores del vector $\mathbf{v}$. Los ángulos directores del vector $\mathbf{v}$ están dados por

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\mathbf{v}|}, \quad \cos\beta = \frac{y}{|\mathbf{v}|}, \quad \cos\gamma = \frac{z}{|\mathbf{v}|}. \tag{22}$$

Si $\mathbf{v}$ es un vector unitario, entonces $|\mathbf{v}| = 1$ y

$$\cos\alpha = x, \quad \cos\beta = y, \quad \cos\gamma = z. \tag{23}$$

Por definición, cada uno de estos tres ángulos está en el intervalo de $[0, \pi]$. Los cosenos de estos ángulos reciben el nombre de cosenos directores del vector $\mathbf{v}$. Observese que de las ecuaciones (22)

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{x^2 + y^2 + y^2}{|\mathbf{v}|^2} = \frac{|\mathbf{v}|^2}{|\mathbf{v}|^2} = 1. \tag{24}$$

Si α, β y γ son tres números reales (cada uno entre 0 y π) tales que satisfacen la condición (24), entonces determinan de forma única el vector unitario $\mathbf{u} =$

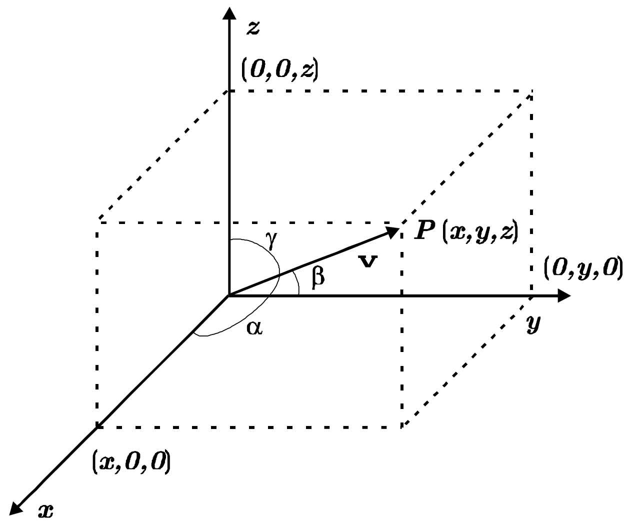


Figure 7: Cosenos directores del vector $\mathbf{v} = (x, y, z)$

$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. Observese que de la ecuación (24) los tres ángulos α, β y γ, no son independientes, si no que uno de ellos se puede escribir en términos de los otros dos.
Comentario: si $\mathbf{v} = (a, b, c)$ y $|\mathbf{v}| \neq 1$, entonces a, b y c reciben el nombre de **números directores** de $\mathbf{v}$.

Example 31 *Halle los cosenas directores de* $\mathbf{v} = (4, -1, 6)$.

Solution 32 *La dirección de es* $\mathbf{v}/|\mathbf{v}| = \mathbf{v}/\sqrt{53} = (4/\sqrt{53}, -1/\sqrt{53}, 6/\sqrt{53})$, *entonces*

$$\cos\alpha = 4/\sqrt{53} = 0.549,$$
$$\cos\beta = -1/\sqrt{53} = -0.137,$$
$$\cos\gamma = 6/\sqrt{53} = 0.824.$$

Luego los ángulos son

$$\alpha = 56.67^\circ = 0.989,$$
$$\beta = 97.90^\circ = 1.709,$$
$$\gamma = 34.50^\circ = 0.602$$

Example 33 *Hallar el vector v, tal que su magnitud es* 7 *y sus cosenos directores son* $1/\sqrt{6}$, $1/\sqrt{3}$ *y* $1/\sqrt{2}$.

Solution 34 *Sea* $\mathbf{u} = (1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{2})$. *Entonces es un vector unitario, ya que* $|\mathbf{u}| = 1$. *Así, la dirección de* $\mathbf{v}$ *está dada por* $\mathbf{u}$ *y*

$$\mathbf{v} = |v|\,\mathbf{u} = 7\mathbf{u} = (7/\sqrt{6}, 7/\sqrt{3}, 7/\sqrt{2}).$$

Nota: En R^2, si $\mathbf{v}$ es un vector unitario y se escribe $\mathbf{v} = (\cos\theta, \sin\theta)$ siendo θ la dirección de $\mathbf{v}$, entonces $\cos\theta$ y $\sin\theta$ son los cosenos directores de $\mathbf{v}$. En este caso $\alpha = \theta$ y β se define como el ángulo formado con $\mathbf{v}$ y el eje y.

Se vio que los vectores en R^2 se pueden representar en términos de los vectores base $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$. En R^3 se puede aplicar la misma idea definiendo

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0)\,, \quad \mathbf{j} = (0, 1, 0), \quad \mathbf{k} = (0, 0, 1). \tag{25}$$

Los vectores $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ son vectores unitarios. Los vectores $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ están situados a lo largo de los ejes x, y y z respectivamente. Si $\mathbf{v} = (x, y, z)$ es cualquier vector en R^3 entonces

$$\mathbf{v} = (x, y, z) = (x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}. \tag{26}$$

Es decir, caulquier vector en R^3 se puede escribir en forma única en términos de los vectores $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$.

Definition 35 *El producto escalar de dos vectores* $\mathbf{u} = (x_1, y_1, z_1)$ *y* $\mathbf{v} =(x_2, y_2, z_2)$ *en* R^3 *es dado por*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \tag{27}$$

Los siguientes teroremas son resultados deducidos para vectores R^2, sin embargo tambien son validos en R^2. su demostración es similar a las demostraciones en R^2.

Theorem 36 *Sean* $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$ *dos vectores diferentes de cero. Si* φ *es el ángulo entre ellos, entonces*

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|} \tag{28}$$

Example 37 *Calculese el coseno del ángulo que forman los vectores* $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ *y* $v = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

Solution 38 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 7$, $|\mathbf{u}| = \sqrt{14}$ *y* $|\mathbf{v}| = \sqrt{26}$ *de donde* $\cos\varphi = 7/\left(\sqrt{14}\sqrt{26}\right) = 7/(2\sqrt{91}) = 0.367$ *y* $\varphi = 68.48° = 1.20$

Definition 39 ***Vectores paralelos y ortogonales.*** *Dos vectores* $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$ *diferentes de cero son*

1. **Paralelos** si el ángulo entre ellos es cero o π.

2. Ortogonales o perpendiculares si el ángulo entre ellos es $\pi/2$.

Theorem 40

1. *Si* $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, *entonces* $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$ *son paralelos si y sólo* $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{u}$ *si para alguna constante* $\alpha \neq 0$.

2. *Si* $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$ *son diferentes de cero, entonces* $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$ *son ortogonales si y sólo si* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

Example 41 *Muestre que los vectores* $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ *y* $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$ *son paralelos*

Solution 42 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -52$, $|\mathbf{u}| = \sqrt{26}$ *y* $|\mathbf{v}| = \sqrt{104}$. *Entonces*

$$\begin{aligned}\cos\varphi &= \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|} = \frac{-52}{\sqrt{26}\sqrt{104}} \\ &= -1\end{aligned}$$

de donde $\varphi = \pi$. *Otra forma de ver que* $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$ *es notando que* $\mathbf{v} = -2\mathbf{u}$.

Example 43 *Encuentre un número* α, *tal que* $\mathbf{u} = 8\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ *y* $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \alpha\mathbf{k}$ *sean ortogonales.*

Solution 44 *Para que* $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$ *sean ortogonales, se debe cumplir que* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, *en este caso* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 10 + 4\alpha = 0$, *de donde* $\alpha = -5/2$

Theorem 45 *Sea* $\mathbf{v}$ *un vector distinto de cero. Entonces, si* $\mathbf{u}$ *es un vector cualquiera, el vector*

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v} \tag{29}$$

es ortogonal a $\mathbf{v}$.

Definition 46 *Sean* $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$ *vectores diferentes de cero. La* ***proyeccción*** *de* $\mathbf{u}$ *sobre* $\mathbf{v}$, *denotado por* $proy_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$, *se define por*

$$proy_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v} \tag{30}$$

La componente de u en la direccion de $\mathbf{v}$ *es* $\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$.
Adviértase que $\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ *es un vector unitario en la dirección de* $\mathbf{v}$.

Example 47 *Sean* $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ *y* $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$. *Encuentrese la proyección de* $\mathbf{u}$ *sobre* $\mathbf{v}$.

Solution 48 *La proyección de* $\mathbf{u}$ *sobre* $\mathbf{v}$ *se define por*

$$proy_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v}. \tag{31}$$

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 42$ *y* $|\mathbf{v}|^2 = 41$, *de donde*

$$\begin{aligned}proy_{\mathbf{v}}\mathbf{u} &= \left(\frac{2}{41}\right)(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k}). \\ proy_{\mathbf{v}}\mathbf{u} &= \frac{2}{41}\mathbf{i} + \frac{4}{41}\mathbf{j} - \frac{12}{41}\mathbf{k}\end{aligned}$$

0.6 Producto cruz de dos vectores

Hasta ahora, el único producto entre vectores que se ha considerado es el producto escalar o producto punto. Aqui veremos otro producto entre vectores, llamado producto cruz (o producto vectorial), que sólo está definido en R^3.

Definition 49 ***Producto cruz.*** *Sean* $\mathbf{u} = a_1\mathbf{i}+b_1\mathbf{j}+c_1\mathbf{k}$ *y* $\mathbf{v} = a_2\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+c_2\mathbf{k}$. *Entonces el* ***producto cruz o vectorial*** *se define como*

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = (b_1c_2 - c_1b_2)\,\mathbf{i}+(c_1a_2 - a_1c_2)\,\mathbf{j}+(a_1b_2 - b_1a_2)\,\mathbf{k} \tag{32}$$

Nótese que el producto cruz es un vector, a direfencia del producto punto que resulta un escalar.

Example 50 *Sean* $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ *y* $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$. *Calcular* $\mathbf{w} = \mathbf{u}\times\mathbf{v}$.

Solution 51 *De acuerdo a la definición de producto cruz*

$$\begin{aligned}\mathbf{w} &= \mathbf{u}\times\mathbf{v}\\ &= (4-6)\,\mathbf{i} + (4+4)\mathbf{j} + (3+2)\mathbf{k}\\ \mathbf{w} &= -2\mathbf{i}+8\mathbf{j}+5\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Antes de continuar estudiando el producto cruz, se indicara una forma facil de calcular $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$.

Theorem 52

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix} \tag{33}$$

Proof.

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix} \tag{34}$$

$$= (b_1c_2 - c_1b_2)\,\mathbf{i}+(c_1a_2 - a_1c_2)\,\mathbf{j}+(a_1b_2 - b_1a_2)\,\mathbf{k} \tag{35}$$

que es igual a $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ *según la definición.* ■

Example 53 *Calcular* $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ *si* $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ *y* $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, *usando el resultado del teorema anterior.*

Solution 54

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 2 & 4 & -5\\ -3 & -2 & 1\end{vmatrix} \tag{36}$$

$$= \mathbf{i}\begin{vmatrix} 4 & -5\\ -2 & 1\end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} 2 & -5\\ -3 & 1\end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} 2 & 4\\ -3 & -2\end{vmatrix} \tag{37}$$

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = -6\mathbf{i}+13\mathbf{j}+8\mathbf{k}. \tag{38}$$

Theorem 55 *Sean* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *y* $\mathbf{w}$ *vectores en* R^3 *y sea* α *un escalar. Entonces*

i) $\mathbf{u}\times\mathbf{0}=\mathbf{0}\times\mathbf{u}=\mathbf{0}$.

ii) $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=-\mathbf{v}\times\mathbf{u}$ *(Propiedad de anticonmutatividad del producto cruz.)*

iii) $(\alpha\mathbf{u})\times\mathbf{v}=\alpha(\mathbf{u}\times\mathbf{v})$.

iv) $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}+\mathbf{w})=\mathbf{u}\times\mathbf{v}+\mathbf{u}\times\mathbf{w}$. *(propiedad de distribuición del producto cruz.)*

v) $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}=\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$. *(A esto se le llama triple producto escalar de* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *y* $\mathbf{w}$.*)*

vi) $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=\mathbf{v}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=0$. *(Es decir,* $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ *es ortogonal tanto a* $\mathbf{u}$ *como a* $\mathbf{v}$.*)*

vii) Si $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$ *son paralelos, entonces* $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\mathbf{0}$.

Proof. *La demostración de estos resultados es sencilla. Se demostrarán los resultados v), vi) y vii). Sean* $\mathbf{u}=a_1\mathbf{i}+b_1\mathbf{j}+c_1\mathbf{k}$, $\mathbf{v}=a_2\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+c_2\mathbf{k}$ *y* $\mathbf{w}=a_3\mathbf{i}+b_3\mathbf{j}+c_3\mathbf{k}$. *Como*

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}= &\left[(b_1c_2-c_1b_2)\,\mathbf{i}+(c_1a_2-a_1c_2)\,\mathbf{j}+(a_1b_2-b_1a_2)\,\mathbf{k}\right]\cdot\\ &(a_3\mathbf{i}+b_3\mathbf{j}+c_3\mathbf{k})\\ &=(b_1c_2-c_1b_2)\,a_3+(c_1a_2-a_1c_2)\,b_3+(a_1b_2-b_1a_2)\,c_3\\ &=a_1(b_2c_3-c_2b_3)+b_1(c_2a_3-a_2c_3)+c_1(a_2b_3-b_2a_3)\\ &=(a_1\mathbf{i}+b_1\mathbf{j}+c_1\mathbf{k})\cdot\\ &\left[(b_2c_3-c_2b_3)\,\mathbf{i}+(c_2a_3-a_2c_3)\,\mathbf{j}+(a_2b_3-b_2a_3)\,\mathbf{k}\right]\\ (\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}&=\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w}).\end{aligned}$$

Para vi) tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})&=(a_1\mathbf{i}+b_1\mathbf{j}+c_1\mathbf{k})\cdot\\ &\left[(b_1c_2-c_1b_2)\,\mathbf{i}+(c_1a_2-a_1c_2)\,\mathbf{j}+(a_1b_2-b_1a_2)\,\mathbf{k}\right]\\ &=(b_1c_2-c_1b_2)\,a_1+(c_1a_2-a_1c_2)\,b_1+(a_1b_2-b_1a_2)\,c_1\\ &=a_1b_1c_2+b_1c_1a_2+a_1c_1b_2-a_1c_1b_2-b_1a_1c_2-b_1c_1a_2\\ \mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})&=0.\end{aligned}$$

En vii), si $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$ *son paralelos entonces existe algun* α, *tal que* $\mathbf{v}=\alpha\mathbf{u}$. *Entonces*

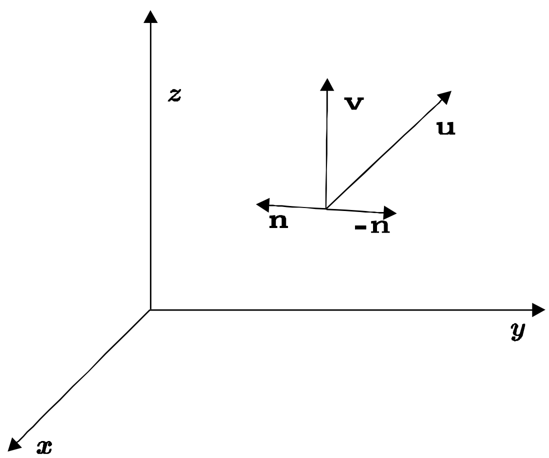
$$\begin{aligned}\mathbf{u}\times\mathbf{v}&=\mathbf{u}\times(\alpha\mathbf{u})=\alpha(\mathbf{u}\times\mathbf{u})\\ &=\alpha\left[(b_1c_1-c_1b_1)\,\mathbf{i}+(c_1a_1-a_1c_1)\,\mathbf{j}+(a_1b_1-b_1a_1)\right]\\ &=\mathbf{0}.\end{aligned}$$

■

La parte vi) del teorema 55 es de las más usadas, se pude enunciar como:

El producto cruz $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es ortogonal tanto a $\mathbf{u}$ como $\mathbf{v}$.

Así, la dirección del vector $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ se pude describir en término de un vector unitario ortogonal a $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. Sin embargo, siempre hay dos vectores unitarios ortogonales a $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, en la figura **??**, se ilustran estos dos vectores, $\mathbf{n}$ y $-\mathbf{n}$ ($\mathbf{n}$ significa **normal**) que son ortogonales a $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. ¿Cuál de estos dos vectores describe la dirección de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$? La respuesta se encuentra en la **regla de la mano derecha**. Si el dedo indice se coloca en la direción de $\mathbf{u}$ y el dedo medio en la dirección de $\mathbf{v}$, entonces el dedo pulgar apunta en la dirección de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. En la figura **??** los vectores $\mathbf{n}$ y $-\mathbf{n}$ se han dibujado de tal manera que $\mathbf{n}$ tenga la dirección correcta de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.



Ahora que conocemos la dirección de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, estudiaremos su magnitud.

Theorem 56 *Si φ es el ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, entonces*

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \sin\varphi. \tag{39}$$

Proof. *Del resultado v del teorema 55 tenemos*

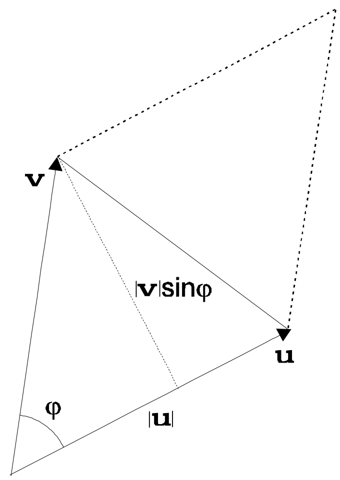
$$\begin{aligned} |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|^2 &= (b_1c_2 - c_1b_2)^2 + (c_1a_2 - a_1c_2)^2 + (a_1b_2 - b_1a_2)^2 \\ &= \left(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2\right)\left(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2\right) - (a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2)^2 \\ &= |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 . \end{aligned}$$

Como $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \cos\varphi$, entonces

$$\begin{aligned} |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|^2 &= |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 \left(1 - \cos^2\varphi\right) \\ |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|^2 &= |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 \sin^2\varphi. \end{aligned}$$

■

Este teorema 56 admite una interpretación geométrica interesante, como el area del paralelogramo cuyos lados son los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. Considerese la figura 0.6, en donde por comodidad se han dibujado los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en el plano. El area del paralelogramo es dos veces el area del triángulo fomado con lineas continuas. El area de este triángulo es $|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\sin\varphi/2$. De donde el area del paralelogramo es $A = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\sin\varphi = |\mathbf{u}\times\mathbf{v}|$.



Example 57 *Hallar el area del paralegramo cuyos vertices consecutivos están ubicados en los puntos* $P = (1, 3, -2)$, $Q = (2, 1, 4)$ *y* $R = (-3, 1, 6)$.

Solution 58 *Sea* $\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ}$ *y* $\mathbf{v} = \overrightarrow{PR}$, *entonces* $\mathbf{u} = (1, -2, 6)$ *y* $\mathbf{v} = (-4, -2, 8)$ *representan dos lados adyacentes del paralelogramo, y el area entonces es*

$$\begin{aligned} A &= |\mathbf{u}\times\mathbf{v}| \\ &= \left\| \begin{matrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \\ 1 & -2 & 6 \\ -4 & -2 & 8 \end{matrix} \right\| \\ &= |-4\mathbf{i}-32\mathbf{j}-10\mathbf{k}| \\ A &= \sqrt{1140} = 2\sqrt{285} \end{aligned}$$

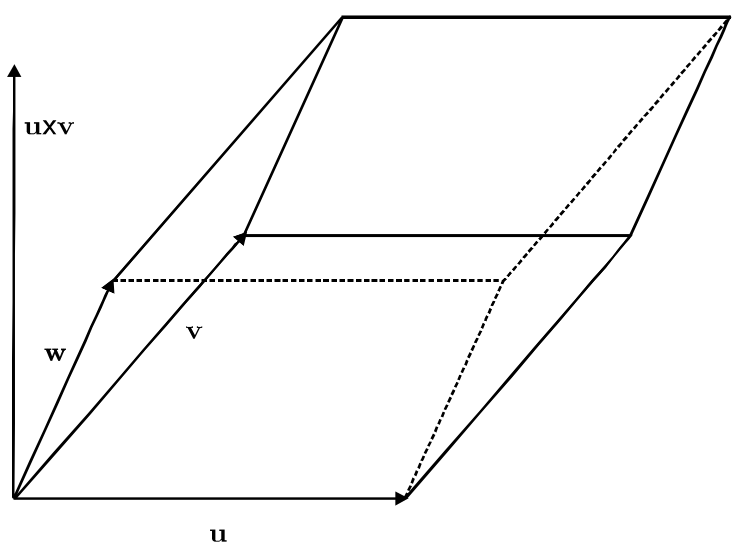
El area de un paralelogramo formado por dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en R^2 también se puede considerar como un determinante, para ver esto, considérese a los vectores en R^2 como casos especiales de R^3, es decir, considérese que la componente $\mathbf{k}$ de estos vectores es cero, $\mathbf{u} = (a_1, b_1, 0)$ y $\mathbf{v} = (a_2, b_2, 0)$. El area del paralelogramo es entonces

$$\begin{aligned}
A &= \left\| \begin{array}{ccc} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \end{array} \right\| \\
&= \left|(a_1 b_2 - a_2 b_1)\,\mathbf{k}\right| \\
&= \left|(a_1 b_2 - a_2 b_1)\right| \\
A &= \left\| \begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{array} \right\|
\end{aligned}$$

Interpretación geométrica del triple producto escalar.

El triple producto escalar también tiene una interpretación geométrica. Vease la figura 0.6. Sean $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ vectores que no están situados en el mismo plano. Entonces forman los lados de un **paralelepípedo** en el espacio. Calculemos el volumen del paralelepipedo: Su base es un paralelogramo de area $A = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$.

El vector $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es ortogonal a $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, y en consecuencia es perpendicular al paralelogramo determinado por $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. La altura h del paralelepípedo se mide a lo largo de un vector ortogonal al paralelogramo.



De la discusión acerca de las proyecciones, la altura h, es la magnitud de la proyección de $\mathbf{w}$ sobre el vector $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, es decir

$$\begin{aligned}
h &= |proy_{\mathbf{u}\times\mathbf{v}}\mathbf{w}| \\
&= \left| \frac{(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}}{|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|^2}\,(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) \right| \\
h &= \frac{|(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}|}{|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|}.
\end{aligned}$$

El volumen del paralelepípedo es el base por altura, es decir

$$\begin{aligned} V &= Ah \\ &= |\mathbf{u}\times\mathbf{v}|\,\frac{|(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}|}{|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|} \\ V &= |(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}| \end{aligned}$$

De este resultado se puede extraer un resulatado útil. Dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ no paralelos siempre están en un plano. Si el vector $\mathbf{w}$ está contenido en este mismo plano, entonces $\mathbf{w}$ es perpendicular a $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ y $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}=0$. A la inversa, si $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}=0$ entonces $\mathbf{w}$ es perpendicular a $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$, por lo que $\mathbf{w}$ está contenido en el plano definido por $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. Entonces
Tres vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son coplanares si y sólo si su triple producto escalar es cero.

Mostramos ahora una forma simple de calcular el triple producto escalar. Si $\mathbf{u}=a_1\mathbf{i}+b_1\mathbf{j}+c_1\mathbf{k}$, $\mathbf{v}=a_2\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+c_2\mathbf{k}$ y $\mathbf{w}=a_3\mathbf{i}+b_3\mathbf{j}+c_3\mathbf{k}$, el producto cruz $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ es dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{u}\times\mathbf{v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ &= (b_1c_2-c_1b_2)\,\mathbf{i}-(a_1c_2-c_1a_2)\,\mathbf{j}+(a_1b_2-b_1a_2)\,\mathbf{k} \end{aligned}$$

y $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}$ es

$$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}=(b_1c_2-c_1b_2)\,a_3-(a_1c_2-c_1a_2)\,b_3+(a_1b_2-b_1a_2) \tag{40}$$

$$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}=\begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \tag{41}$$

0.7 Planos y rectas en R^3

Antes de estudiar las ecuaciones de rectas y planos en R^3 resumimos las principales características de los vectores en R^2 y R^3.

Las descripciones de algebraicas de la suma de vectores y de la multiplicación por escalares en R^2 y R^3, implican las siguientes propiedades para vectores arbitrarios $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ y $\mathbf{z}$ y números reales arbitrarios a y b.

1. $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{x}$.
2. $(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}=\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})$.
3. Existe un vector llamado $\mathbf{0}$ tal que $\mathbf{x}+\mathbf{0}=\mathbf{x}$ para todo vector $\mathbf{x}$.
4. Para todo vector $\mathbf{x}$ existe un vector $\mathbf{y}$ tal que $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{0}$.
5. $1\mathbf{x}=\mathbf{x}$.

6. $(ab)\,\mathbf{x} = a(b\mathbf{x})$.
7. $a(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = a\mathbf{x} + a\mathbf{y}$.
8. $(a+b)\mathbf{x} = a\mathbf{x} + b\mathbf{x}$.

Utilizaremos estos resultados para escribir las ecuaciones de la recta y planos en el espacio.

Ecuaciones de la recta

Considérese primero la recta que pasa por dos puntos distinto P y Q. Sea O el origen de un sistema de coordenadas en el espacio y sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ los vectores que parten de O y terminan respectivamente en P y Q. Sean (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) las coordenadas de P y Q. Si $\mathbf{w}$ es el vector que que principia en P y termina en Q, la suma de los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{w}$ es el vector $\mathbf{v}$ (ver la figura 0.7), $\mathbf{u}+\mathbf{w} = \mathbf{v}$ y por lo tanto $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$, donde $-\mathbf{u}$ representa al vector $(-1)\mathbf{u}$. Como un múltiplo escalar de $\mathbf{w}$ es paralelo a $\mathbf{w}$, pero posiblemente con una longitud diferente a $\mathbf{w}$, cualquier punto de la recta que pasa por P y Q se puede obtener como el extremo del vector que principia en P y tiene la misma dirección de $\mathbf{w}$, esto es, $t\mathbf{w}$ para algún número real t. Recíprocamente, el extremo de cada vector de la forma $t\mathbf{w}$ que principia en P está en la línea que une a P y Q. Como $\mathbf{u}$ es un vector que va del origen a P, el extremo de $\mathbf{u}$ representa al punto P. Luego la ecuación de la recta que pasa por P y Q es

$$\mathbf{x} = \mathbf{u} + t\mathbf{w} = \mathbf{u} + t(\mathbf{v} - \mathbf{u}), \tag{42}$$

donde t es un número real y $\mathbf{x}$ es un punto arbitrario de la recta o bien, el vector que parte del origen y va al punto $\mathbf{x}$. La ecuación (42) se conoce como **ecuación vectorial** de la recta.

Sean (x, y, z) las coordenadas de punto $\mathbf{x}$. Entonces la ecuación de la recta (42) se puede escribir en términos de sus componentes como

$$\begin{aligned} x &= x_1 + t(x_2 - x_1), \\ y &= y_1 + t(y_2 - y_1), \\ z &= z_1 + t(z_2 - z_1). \end{aligned} \tag{43}$$

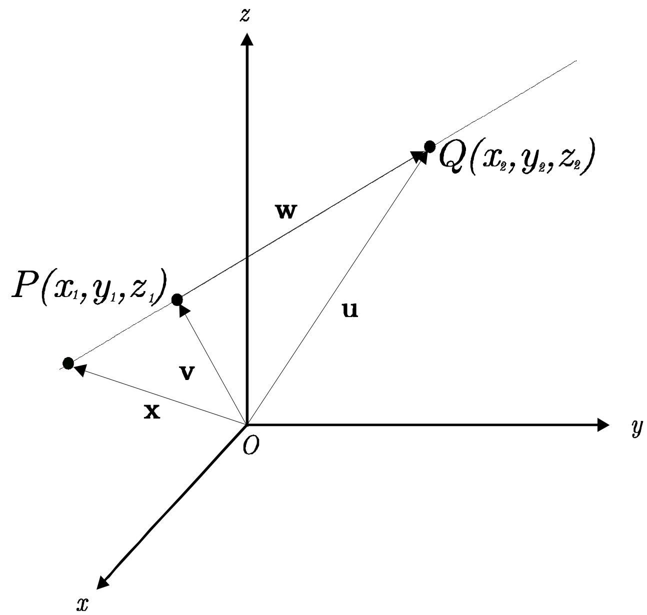
Estas últimas se conocen como **ecuaciones paramétricas** de la recta.

Por último, si se resuelven las ecuaciones (43) para t y definiendo $a = x_2 - x_1$, $b = y_2 - y_1$ y $c = z_2 - z_1$ se tiene

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z = z_1}{c}. \tag{44}$$

Que son conocidas como ecuaciones simétricas de la recta.

Example 59 *Encontremos la ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos P y Q de coordenadas $(-2, 0, 1)$ y $(4, 5, 3)$, respectivamente.*



Solution 60 *Los vectores* $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$ *que principian en el origen y terminan en* P *y* Q*, respectivamente, son*

$$\mathbf{u} = (-2, 0, 1) \text{ y } \mathbf{v} = (4, 5, 3).$$

Luego el vector $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{u} = (6, 5, 2)$*, entonces la ecuación de la recta es*

$$\mathbf{x} = (x, y, z) = (-2, 0, 1) + t(6, 5, 2).$$

Example 61 *Hallar la ecuación vectorial, las ecuaciones paramétricas y las ecuaciones simétricas de la recta que pasa por los puntos* $P = (2, -1, 6)$ *y* $Q = (3, 1, -2)$.

Solution 62 *Los vectores* $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$ *son dados por*

$$\mathbf{u} = (2, -1, 6) \text{ y } \mathbf{v} = (3, 1, -2).$$

Entonces el vector $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{u} = (1, 2, -8)$*. La ecuación vectorial de la recta resulta*

$$\mathbf{x} = (2, -1, 6) + t(1, 2, -8). \tag{45}$$

De esta última ecuación obtenemos

$$(x, y, z) = (2 + t, -1 - 2t, 6 - 8t). \tag{46}$$

Escribiendo cada componente de la última ecuación obtenemos las ecuaciones paramétricas

$$\begin{aligned} x &= 2+t, \\ y &= -12t, \\ z &= 6-8t. \end{aligned} \tag{47}$$

y de éstas, resolviendo para t en cada una e igualando las expresiones, se tiene

$$x-2=\frac{y+1}{2}=-\frac{z-6}{8} \tag{48}$$

que son las ecuaciones simetricas de la recta.

Example 63 *Determinar las ecuaciones simétricas de la recta que pasa por el punto $(1,-2,4)$ y es paralela al vector $\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$.*

Solution 64 *Sean $\mathbf{u}=(1,-2,4)$ y $\mathbf{w}=\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}=(1,1,-1)$. Entonces $a=1$, $b=1$, y $c=-1$. por lo que las eciaciones simétricas de la recta son*

$$x-1=y+2=-(z-4). \tag{49}$$

La distancia entre dos rectas L_1 y L_1 se mide a lo largo de un vector $\mathbf{v}$ que es perpendicular a L_1 y L_1.

Ecuaciones del Plano.

Ahora, sean P, Q y R tres puntos no colineales en el espacio. Estos puntos determina un plano único cuya ecuación puede ser encontrada mediante el uso de nuestras anteriores observaciones sobre vectores. En la figura 0.7 los tres puntos P, Q y R forman un triángulo en el espacio, el plano que contiene a este triángulo es el plano determinado por los tres puntos P, Q y R. Sean (x_1,y_1,z_1), (x_2,y_2,z_2) y (x_3,y_3,z_3) las coordenadass de estos tres puntos y, $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, los vectores que parten del punto P y van a Q y R, respectivamente, es decir

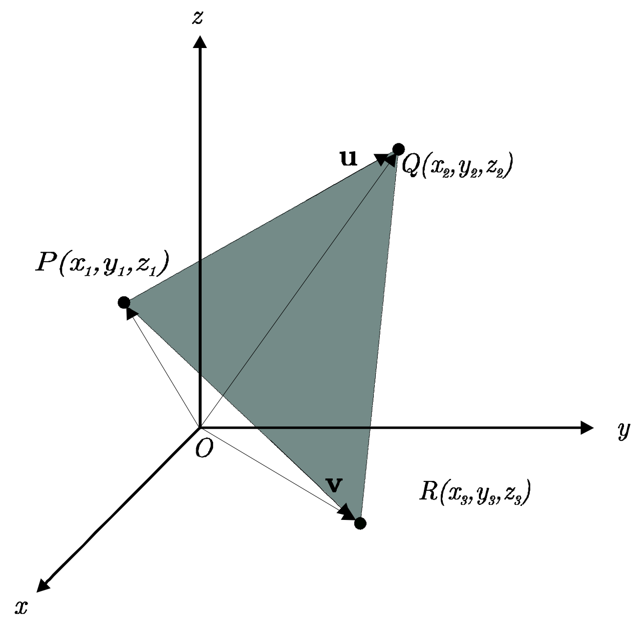
$$\mathbf{u}=\overrightarrow{PQ}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1), \tag{50}$$

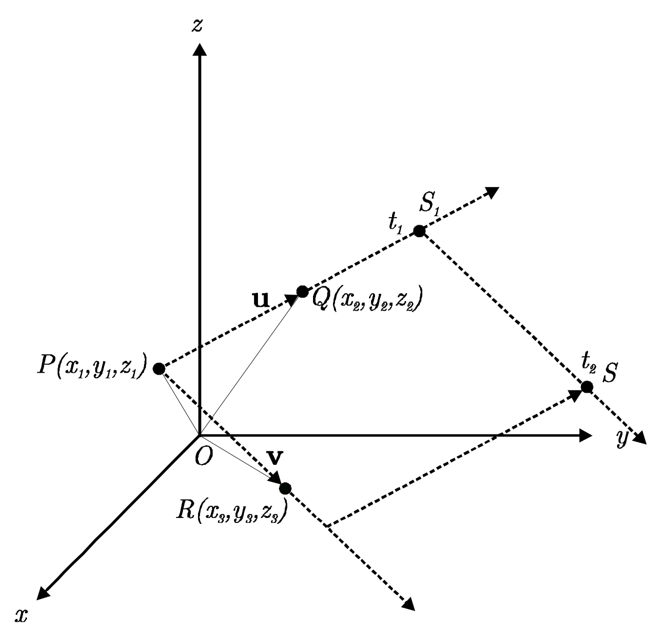
$$\mathbf{v}=\overrightarrow{PR}=(x_3-x_1,y_3-y_1,z_3-z_1). \tag{51}$$

La ecuación del plano la construimos como sigue. Primero consideramos todos los puntos que están sobre la recta que une a los puntos P y Q, por ejemplo, estos punto están descritos por la ecuación

$$\overrightarrow{OS}_1=\overrightarrow{OP}+t_1\mathbf{u} \qquad t_1\in R \tag{52}$$

En la figura 0.7 se ilustra un punto S_1 sobre esta recta. Si tomamos un valor cualesquiers de t_1 y en seguida contruimos la recta que pasa por S_1 y es paralela al vector que va de P a R, es decir, paralela a $\mathbf{v}$, tenemos que los puntos de esta recta están contenidos en el plano definido por los tres puntos P, Q y R. Sea S un punto cualesquiera contenido en esta última recta, este punto estará descrito por la ecuación


z
u
Q(x2,y2,z2)
P(x1,y1,z1)
y
O
v
R(x3,y3,z3)
x


z
S1
t1
u
Q(x2,y2,z2)
P(x1,y1,z1)
t2
S
y
O
v
R(x3,y3,z3)
x

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OS}_1 + t_2\mathbf{v} \qquad t_2 \in R$$
$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OP} + t_1\mathbf{u} + t_2\mathbf{v} \qquad t_1,t_2 \in R. \tag{53}$$

De esta manera, a cada valor de t_1 en la última ecuación le corresponde una recta paralela al vector $\mathbf{v}$, barriendo t_1 sobre todos los numeros reales, obtenemos una infinita de rectas contenidas en el plano definido por P, Q y R. Sea $\mathbf{x}=(x, y, z)$ el vetor que va del origen al punto S, entonces esta ecuación se pude escribir como

$$\mathbf{x} = (x_1, y_1, z_1) + t_1\mathbf{u} + t_2\mathbf{v} \qquad t_1,t_2 \in R \tag{54}$$

y es la ecuación del plano que contiene a los puntos P, Q y R. Naturalmente, esta no es la única forma de escribir la ecuación del plano, aqui se ha usado el punto P como punto inicial, pero se puden elegir cualquiera de los otros dosdonde t_1 y t_2 son números reales arbitrarios y $\mathbf{x}$ es un punto cualquiera del plano. A continuación veremos un ejemplode como determinar la ecuación de un plano dados tres punto y posteriormente veremos otra forma de la ecuación del plano.

Example 65 *Sean P, Q y R puntos de coordenadas* $(1, 0, 2)$,$(-3, -2, 4)$ *y* $(1, 8, -5)$, *respectivamente. El extremo del vector que parte del origen y tiene la misma longitud y dirección que el vector que va de P a Q es* $(-3, -2, 4) - (1, 0, 2) = (-4, -2, 2)$; *de la misma forma, el extremo del vector que va parte del origen y tiene la longitud y dirección del vector que va de P a R es* $(1, 8, -5) - (1, 0, 2) = (0, 8, -7)$.*luego la ecuación del plano que contiene a los tres puntos dados es*

$$x = (1, 0, 2) + t_1(-4, -2, 2) + t_2(0, 8, -7) \tag{55}$$

Otra forma de determinar la ecuación de un plano consiste en especificar un punto P contenido en el plano y un vector ortogonal al plano. Este vector ortogonal recibe el nombre de **vector normal** y se denota por $\mathbf{n}$ (ver figura 0.7). Asi, obtenemos la siguiente definición:

Definition 66 *Sea P un punto en el espacio y sea* $\mathbf{n}$ *un vector dado, deferente de cero. Entonces, el conjunto de todos los puntos Q tales que* $\overrightarrow{PQ} \cdot \mathbf{n} = 0$ *constituye un plano en* R^3.

Sea $P = (x_0, y_0, z_0)$ un punto fijo de un plano cuyo vector normal es $\mathbf{n} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k} = (a, b, c)$. Si $Q = (x, y, z)$ es otro punto en el plano, entonces $\overrightarrow{PQ} = (x_0 - x, y_0 - y, z_0 - z)$ es ortogonal a $\mathbf{n}$, es decir $\overrightarrow{PQ} \cdot \mathbf{n} = 0$ de donde tenemos

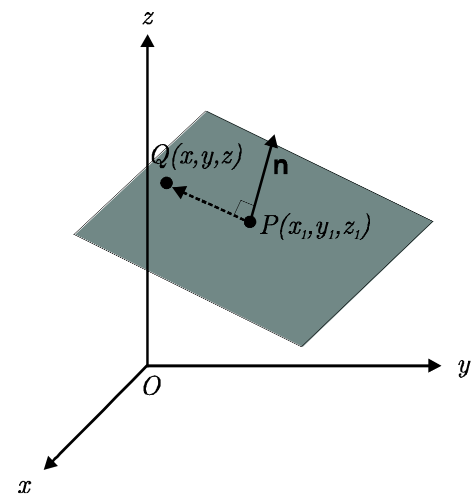
$$a\,(x - x_0) + b\,(y - y_0) + c\,(z - z_0) = 0 \tag{56}$$

que se puede escribir como

$$ax + by + cz = d \tag{57}$$

donde

$$d = ax_0 + by_0 + cz_0 = \overrightarrow{OP} \cdot \mathbf{n}. \tag{58}$$



Example 67 *Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto* $(2,5,1)$ *y que tiene el vector normal es* $\mathbf{n}=(1,-2,3)$

Solution 68 *De la ecuación (56) se obtiene* $(x-2)-2(y-5)+3(z-1)=0$, *es decir,*

$$x-2y+3z=-5. \tag{59}$$

Dados tres puntos no colineal, estos determinan un pano, como vimos anteriormente, con estos tres puntos se puede determinar un vector normal al plano. Sean P, S y R estos tres puntos y $\mathbf{u}=\overrightarrow{PS}$ y $\mathbf{v}=\overrightarrow{PR}$, entonces, estos dos vectores determinan un vector normal al plano dado por

$$\mathbf{n}=\mathbf{u}\times\mathbf{v}. \tag{60}$$

Example 69 *Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos* $P=(1,2,1)$, $Q=(-2,3,-1)$ *y* $R=(1,0,4)$.

Solution 70 *Los vectores* $\overrightarrow{PQ}=-3\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ *y* $\overrightarrow{PR}=-2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$, *entonces*

$$\mathbf{n}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ -3 & 1 & -2\\ 0 & -2 & 3\end{vmatrix}=-\mathbf{i}+9\mathbf{j}+6\mathbf{k} \tag{61}$$

y la ecuación del plano es

$$-(x-1)+9(y-2)+6(z-1)=0 \tag{62}$$

o

$$-x+9y+6z=23 \tag{63}$$

Definition 71 *Dos planos son paralelos si sus vectores normales son paralelos, es decir, si el producto cruz de dichos vectores es cero.*

Example 72 *Determine si los planos descritos por las ecuaciones siguientes son paralelos*

$$2x + 3y - z = 3 \tag{64}$$

$$-4x - 6y + 2x = 8 \tag{65}$$

Solution 73 *El vector normal al plano descrito por la primer ecuación es* $\mathbf{n}_1 = (2, 3, -1)$ *mientras que para la segunda es* $\mathbf{n}_2 = (-4, -6, 2) = -2(2, 3, -1) = -2\mathbf{n}_1$ *por lo que* $\mathbf{n}_1$ *y* $\mathbf{n}_2$ *son paralelos, es decir, los planos son paralelos.*