ALGEBRA LINEAL

David Delepine, Mauro Napsuciale, Simón Rodríguez

28 de agosto de 2005

Índice general

Capítulo 1

Espacios Vectoriales

1.1. Nociones de Espacios Vectoriales

Definición 1 *Un espacio vectorial (o espacio lineal) V sobre un campo F consiste de un conjunto en el que están definidas dos operaciones (llamadas adición y multuplicación por escalares, respectivamente), tal que para cualquier par de elementos $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ en V, exista un elemento único $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ en V, y para cada elemento a en F y cada $\mathbf{x}$ en V, existe un elemento único $a\mathbf{x}$ en V de manera que se cumplan las siguientes condiciones.*

(EV 1) *Para toda $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ en V, $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{x}$ (conmutatividad de la adición).*

(EV 2) *Para toda $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ en V, $(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}=\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})$ (asociatividad de la adición).*

(EV 3) *Existe un elemento único en V llamado $\mathbf{0}$ tal que $\mathbf{x}+\mathbf{0}=\mathbf{x}$.*

(EV 4) *Para cada $\mathbf{x}$ en V, existe un elemento $\mathbf{y}$ en V tal que $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{0}$.*

(EV 5) *Para cada $\mathbf{x}$ en V, $1\mathbf{x}=\mathbf{x}$.*

(EV 6) *Para cada par a, b de elementos en F, y cada $\mathbf{x}$ en V, $(ab)\,\mathbf{x}=a\,(b\mathbf{x})$.*

(EV 7) *Para cada elemento a en F y cada par de elementos $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ en V, $a\,(\mathbf{x}+\mathbf{y})=a\mathbf{x}+a\mathbf{y}$.*

(EV 8) *Para cada par de elementos a, b en F y cada elemento $\mathbf{x}$ en V, $(a+b)\,\mathbf{x}=a\mathbf{x}+b\mathbf{x}$.*

Los elementos $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ *y* $a\mathbf{x}$ *se denominaran, respectivamente, suma de* $\mathbf{x}$ *y* $\mathbf{y}$ *y el producto de* a *y* $\mathbf{x}$.

Los elementos del campo F se llaman *escalares* y los elementos del espacio vectorial se llaman *vectores*.

Frecuentemente, un espacio vectorial será tratado en el curso sin mencionar explícitamente su campo de escalares. el estudiatnte cuidará de recordar, sin embargo, que todo espacio vectorial debe consirerarse como un espacio vectorial sobre un campo, el que se denotará por F. En genera, el campo F son los numeros reales ($\mathbb{R}$) o complejos ($\mathbb{C}$). hablamos en esos casos de espacios vectoriales reales o complejos, respectivamente.

Definición 2 *Sea* $v_1, v_2, ..., v_n$ *un numero finito de vectores de un espacio vectorial* V. *Una combinación lineal (o combili) de* $v_1, v_2, ..., v_n$ *es un vector* $x \in V$ *que admite una decomposición como suma de multiplos de* $v_1, v_2, ..., v_n$:

$$x = v_1\alpha_1 + ... + v_n\alpha_n$$

para coeficientes $\alpha_1, ..., \alpha_n \in F$.

En el resto de la sección introduciremos diversos ejemplos importantes de espacios vectoriales que serán estudiados a través del texto. Obsérvese que al describir un espacio vectorial no sólo es necesario especificar los vectores, también las operaciones de suma y multiplicación por escalares.

Ejemplo 1 *Un objeto de la forma* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *donde los valores o entrada* a_i *son elementos de un campo* F, *se denominará* $n-dimensional$[1] *con valores de* F. *Dos* $n-dimensional$ $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *y* $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ *se definen iguales si y sólo si* $a_i = b_i$ *para* $i = 1, 2, \ldots, n$.*El espacio vectorial* F^n *de* $n-dimensionales$ *con valores de un campo* F.

El conjunto de todas las $n-dimensionales$ con valores de un campo F forma un espacio vectorial, que denotaremos por F^n, bajo las operaciones de suma y multiplicación coordianada (elemento a elemento); esto es, si $\mathbf{x} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in F^n$ y $\mathbf{y} = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in F^n$, entonces

$$\mathbf{x}+\mathbf{y} = (a_1+b_1, a_2+b_2, \ldots, a_n+b_n) \text{ y } c\mathbf{x} = (ca_1, ca_2, \ldots, ca_n).$$

[1] En algunos de los libros de álgebra lineal a los $n-dimensional$ se les da el nombre de n-adas, n-uplas, n-tuplas y otros más, pero aquí preferimos usar la citada denominación.

Por ejemplo, en R^4

$$(3,-2,0,5)+(-1,1,4,2)=(2,-1,4,7)$$

y

$$-5\,(1,-2,0,3)=(-5,10,0,-15)\,.$$

Los elementos de F^n a menudo se escribirán como vectores columna:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ . \\ . \\ . \\ a_n \end{pmatrix}$$

en vez de como vectores renglón $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Puesto que un $1-$*dimensional* con valor de F puede ser visto como un elemento de F, escribiremos F en lugar de F^1 para el espacio vectorial de los $1-$ *dimensional* de F.

Ejemplo 2 *El espacio vectorial $\mathcal{M}_{m\times n}(F)$ de matrices $m \times n$ con valores de un campo F.*

El conjunto de todas las matrices de $m \times n$ con elementos de un campo F, es un espacio vectorial, que denotaremos por $\mathcal{M}_{m\times n}(F)$, bajo las siguientes operaciones de suma y multiplicación por escalares; para A, $B \in \mathcal{M}_{m\times n}(F)$ y $c \in F$

$$(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij} \text{ y } (cA)_{ij} = cA_{ij}.$$

Por ejemplo

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & -2 & 6 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

y

$$-3\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 6 \\ 9 & -6 & -9 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3 *El espacio vectorial $\mathcal{F}(S,F)$ de todas las funciones de un conjunto S en un campo F.*

Sea S un conjunto no vacío y F cualquier campo, y sea $\mathcal{F}(S,F)$ el conjunto de todas las funciones que van de S a F. Dos elementos f y g en $\mathcal{F}(S,F)$ se definen como iguales si $f(s) = g(s)$ para cada $s \in S$. El conjunto $\mathcal{F}(S,F)$ es un espacio vectorial bajo las opraciones de suma y multiplicación por escalares definidas para f, $g \in \mathcal{F}(S,F)$ y $c \in F$ por

$$(f+g)(s) = f(s) + g(s) \text{ y } (cf)(s) = c[f(s)].$$

Para cada $s \in S$. Nótese que éstas son las operaciones normales de suma y producto por escalares utilizadas en cálculo.

Un polinomio con coeficientes de un campo F es una expresión de la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

donde n es un entero no negativo y $a_n, \ldots, a_0$ son elementos de F. Si $f(x) = 0$, esto es, si $a_n = \ldots = a_0 = 0$, entonces $f(x)$ se llama el *polinomio cero* y se dice que el grado de $f(x)$ es -1; de otra forma se define el grado del polinomio como el mayor exponente de x que aparece en la representación

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

correspondiente a un coeficiente no nulo. Nótese que los polinomios de grado cero son funciones de la forma $f(x) = c$ para algun escalar c no nulo.

Dos polinomios $f(x)$ y $g(x)$ son iguales si y sólo si tienen el mismo grado y los coeficientes de pontencias iguales son iguales.

Cuando F es un campo que contiene un número infinito de elementos, normalmente consideramos un polinomio con coeficientes de F como una función de F en F. en este caso, el valor de la función

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

en $c \in F$ es el escalar

$$f(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \ldots + a_1 c + a_0.$$

Aquí, es posible utilizar cuaquiera de las dos notaciones f o $f(x)$ para la función polinomial

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

Ejemplo 4 *El espacio vectorial $\mathcal{P}(F)$ de todos los polinomios con coeficientes de un campo F.*

El conjunto de todos los polinomios con coeficientes de un campo F es un espacio vectorial, que denotaremos por $\mathcal{P}(F)$, bajo las siguientes operaciones: Para

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

y

$$g(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

en $\mathcal{P}(F)$ y $c \in F$

$$(f+g)(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

y

$$(cf)(x) = ca_n x^n + ca_{n-1}x^{n-1} + \ldots + ca_1 x + ca_0. \tag{1.1}$$

Ejemplo 5 *El espacio de todas las sucesiones finitas no nulas en un campo F.*

Sea F cualquier campo. Una sucesión es una función σ de los enteros positivos en F. Como es usual, la sucesión σ tal que $\sigma(n) = a_n$ se escribira como $\{a_n\}$. el espacio vectorial V de todas sucesiones finitas no nulas está integrado por todas las sucesiones $\{a_n\}$ en F que sólo tienen un número finito de términos no nulos a_n. Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son sucesiones en V y $t \in F$, entonces $\{a_n\} + \{b_n\}$ es aquella sucesión $\{c_n\}$ tal que $c_n = a_n + b_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ y $t\{a_n\}$ es aquella sucesión $\{d_n\}$ en V tal que $d_n = ta_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Nuestros dos ejemplos siguientes contienen conjuntos en los que están definidas una suma y un producto por escalares pero no se trata de espacios vectoriales.

Ejemplo 6 *Sea $S = \{(a_1, a_2) : a_1, a_2 \in R\}$. Para (a_1, a_2), $(b_1, b_2) \in S$ y $c \in R$ se definen*

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 - b_2) \text{ y } c(a_1, a_2) = (ca_1, ca_2).$$

Como (EV 1), (EV 2) y (EV 8) no se cumplen, S no es un espacio vectorial bajo estas operaciones.

Ejemplo 7 *Sea S como en el ejemplo anterior. Para (a_1, a_2), $(b_1, b_2) \in S$ y $c \in R$, definimos*

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, 0) \text{ y } c(a_1, a_2) = (ca_1, 0).$$

Luego, bajo estas operaciones, S no es un espacio vectorial, pues (EV 3) (y por lo tanto (EV 4) y (EV 5)) fallan.

Esta sección la concluimos con algunas consecuencias elementales de la definicion de un espacio vectorial.

Teorema 1 *(Ley de cancelación para la suma vectorial). Si $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ y $\mathbf{z}$ son elementos de un espacio vectorial V tal que $\mathbf{x} + \mathbf{z} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$, entonces $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.*
Demostración. *Existe un elemento $\mathbf{v}$ en V tal que $\mathbf{z} + \mathbf{v} = \mathbf{0}$ (EV 4). Luego*
$\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x} + (\mathbf{z} + \mathbf{v}) = (\mathbf{x} + \mathbf{z}) + \mathbf{v} = (\mathbf{y} + \mathbf{z}) + \mathbf{v} = \mathbf{y} + (\mathbf{z} + \mathbf{v}) = \mathbf{y} + \mathbf{0} = \mathbf{y}$
por (EV 2) y (EV 3) ■

Corollario 1 *El vector $\mathbf{0}$ descrito en (EV 3) es único.*

Corollario 2 *El vector $\mathbf{y}$ descrito en (EV 4) es único.*

El vector $\mathbf{0}$ descrito en (EV 3) se llama vector *cero* de V, y el vector $\mathbf{y}$ descrito en (EV 4) (esto es, el vector único tal que $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{0}$) se llama inverso aditivo de $\mathbf{x}$ y se denota por $-\mathbf{x}$.

El siguiente resultado contiene algunas de las propiedades elementales de la multiplicación por escalar.

Teorema 2 *En cualquier espacio vectorial V, son verdaderas los siguientes enunciados:*

(a) $0\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *para toda* $\mathbf{x} \in V$.

(b) $(-a)\mathbf{x} = -(a\mathbf{x})$ *para toda* $a \in F$ *y toda* $\mathbf{x} \in V$.

(c) $a\mathbf{0} = \mathbf{0}$ *para toda* $a \in F$.

Demostración. *(a) Tenemos que* $0\mathbf{x} + \mathbf{0} = 0\mathbf{x} = (0 + 0)\mathbf{x} = 0\mathbf{x} + 0\mathbf{x}$, *en donde se han usado (EV 3), (EV 8) y la propiedad (F 3) de la definición de campo,* $0 + 0 = 0$. *Entonces, tenemos* $0\mathbf{x} + \mathbf{0} = 0\mathbf{x} + 0\mathbf{x}$ *y del teorema 1* $\mathbf{0x} = \mathbf{0}$.

(b) El elemento $-(a\mathbf{x})$ *es el único elemento de* V *tal que* $a\mathbf{x}+[-(a\mathbf{x})]=\mathbf{0}$. *Si* $a\mathbf{x}+(-a)\,\mathbf{x}=\mathbf{0}$, *el corolario 2 anterior implica que* $(-a)\,\mathbf{x}=-(a\mathbf{x})$. *Pero por (EV 8)* $a\mathbf{x}+(-a)\,\mathbf{x}=[a+(-a)]\,\mathbf{x}=0\mathbf{x}$, *y así* $a\mathbf{x}+(-a)\,\mathbf{x}=0\mathbf{x}=\mathbf{0}$ *por (a). Entonces,* $(-a)\mathbf{x}=-(a\mathbf{x})$.
(c) Tenemos que $a\mathbf{0}=a\mathbf{0}+\mathbf{0}=a(\mathbf{0}+\mathbf{0})=a\mathbf{0}+a\mathbf{0}$ *por (EV 3) y (EV 7). Luego* $a\mathbf{0}+\mathbf{0}=a\mathbf{0}+a\mathbf{0}$ *y por el teorema 1* $a\mathbf{0}=\mathbf{0}$. $\blacksquare$

Ejercicio 1 *Demostrar que en cualquier espacio vectorial* V, $(a+b)(x+y) = ax + ay + bx + by$ *para toda* $x, y \in V$ *y cualquier* $a, b \in F$.

Ejercicio 2 *Demostrar los corolarios 1 y 2 del teorema 1.*

Ejercicio 3 *Demostrar la parte (c) del teorema 2.*

Ejercicio 4 *Sea* $V = \{0\}$ *que conste de un único vector cero, y definase* $0+0 = 0$ *y* $c0 = 0$ *para cada* c *de* F. *Demostrar que* V *es un espacio vectorial (*V *se llama espacio vectorial cero).*

Ejercicio 5 *Sea* $\mathcal{M}_{m\times n}(F)$ *el conjunto de todas las matrices de* $m \times n$ *cuyos elementos pertenecen a un campo* F. *Demostrar que* $\mathcal{M}_{m\times n}(F)$ *es un espacio vectorial bajo las siguientes operaciones de suma y multiplicación por escalar. Si* $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(F)$ *y* $c \in F$

$$(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$$

y

$$(cA)_{ij} = cA_{ij}$$

donde $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

Ejercicio 6 *Una función de valor real definida sobre la recta de los reales se llama función par si* $f(-x) = f(x)$ *para todo número real* x. *Demostrar que el conjunto de todas las funciones pares es un espacio vectorial bajo las siguinentes operaciones de suma y multiplicación por escalar. Sean* f *y* g *funciones pares y* c *un número real*

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(cf)(x) = c(x)$$

Ejercicio 7 *Sea* V *el conjunto de pares ordenados de números reales. Si* (a_1, a_2) *y* (b_1, b_2) *son elementos de* V *y* c *un elemento de* F *se defienen*

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 b_2) \quad y \quad c(a_1, a_2) = (ca_1, 0)$$

¿Es V *un espacio vectorial bajo estas operaciones?*
¿Si $F = R$ *es* V *un espacio vectorial?*

1.2. Nociones de subespacios vectoriales.

Normalmente, en el estudio de cualquier estructura algebraica es interesante examinar subconjuntos que tengan la misma estructura que el conjunto que esté siendo considerado. Así, la noción apropiada de subestructura para espacios vectoriales llamada subespacios se define a continuación

Definición 3 *Un subconjunto W de un espacio vectorial V sobre un campo F se llama subespacio vectorial de V si W en si mismo es un espacio vectorial sobre F, bajo las operaciones de suma y multiplicación por escalares definidas en V.*

En cualquir espacio vectorial V, es de notar hacer notar que V y $\{\mathbf{0}\}$ son subespacios. Este último se denomina subespacio *cero* de V o subespacio trivial.

Afortunadamente, no es necesario verificar todas las condiciones sobre espacios vectoriales con el objeto de demostrar que un subconjunto W de un espacio vectorial V es en realidad un subespacio. Como se sabe, las condiciones (EV 1), (EV 2), (EV 5), (EV 6), (EV 7) y (EV 8) se satisfacen para todos los elementos de V, los cuales, automaticamente se cumplen también para los elementos de un subconjunto de V. Entonces, un subconjunto W de V es un subespacio de V si y sólo si las siguientes cuatro condiciones se satisfacen.

1. $\mathbf{x}+\mathbf{y} \in W$ siempre y cuando $\mathbf{x} \in W$ y $\mathbf{y} \in W$.
2. $a\mathbf{x} \in W$ siempre que $a \in F$ y $\mathbf{x} \in W$.
3. El vector cero $\mathbf{0}$ de V pertenece a W.
4. El inverso aditivo de cada elemento de W pertenece a W.

En realidad, la condición 4 es redundante, como lo muestra el siguiente teorema.

Teorema 3 *Sea V un espacio vectorial y W un subconjunto de V. Entonces, W es un subespacio vectorial de V si y sólo si se satisfacen las tres condiciones siguientes:*

(a) $\mathbf{0} \in W$.

(b) $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in W$ siempre y cuando $\mathbf{x} \in W$ y $\mathbf{y} \in W$.

(c) $a\mathbf{x} \in W$ siempre que $a \in F$ y $\mathbf{x} \in W$.

Demostración. Si W es un subespacio de V, entonces W es un espacio vectorial bajo las operaciones de suma y multiplicación por escalar definidas en V. Tenemos entonces que se cumplen las propiedades (b) y (c), y existe un elemento $\mathbf{0}\prime \in W$ tal que $\mathbf{x} + \mathbf{0}\prime = \mathbf{x}$ para toda $\mathbf{x} \in W$. Pero también $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$, y por lo tanto $\mathbf{0}\prime = \mathbf{0}$ por el teorema 1. luego entonces también se satisface la condición (a).

Recíprocamente, si se satisfacen las condiciones (a), (b) y (c), la exposición que precede a este teorema muestra que W puede ser un subespacio de V si el inverso aditivo de cada elemento de W pertenece a W. Pero si $\mathbf{x} \in W$, entonces $(-1)\mathbf{x}$ pertenece a W por la condición (c), y $(-1)\mathbf{x} = -\mathbf{x}$ por el Teorema 2. De aquí que W sea un subespacio de V. ■

El teorema anterior proporcina un método sencillo para determinar si un subconjunto dado de un espacio vectorial es o no realmente un subespacio. En general, este resultado es el que se emplea para demostar que un cierto subconjunto es un subespacio.

La traspuesta M^t de una matriz M de $m \times n$ es la matriz de $n \times m$ obtenida a partir de M mediante el intercambio de renglones por columas; esto es $(M^t)_{ij} = M_{ji}$. Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Una matriz simétrica es una matriz M tal que $M^t = M$. Evidentemente, una matriz simétrica debe ser cuadrada. El conjunto W de todas las matrices simétricas en $M_{n\times n}(F)$ es un subespacio de $M_{n\times n}(F)$ ya que satisface las tres condiciones del teorema 3:

(a) La matriz cero es igual a su traspuesta, y por lo tanto pertenece a W.

Puede probarse fácilmente que para matrices A y B y para escalares a y b cualesquiera, $(aA + bB)^t = aA^t + bB^t$. Usando este hecho, se pueden establecer fácilmente las condiciones (b) y (c) del teorema 3 de la manera siguiente:

(b) Si $A \in W$ y $B \in W$, entonces $A = A^t$ y $B = B^t$. Ahora bien $(A+B)^t = A^t + B^t = A + B$, de manera que $A + B \in W$.

(c) Si $A \in W$, entonces $A = A^t$. Luego, para toda $a \in W$, $(aA)^t = aA^t = aA$. Y así $aA \in W$.

Los siguientes ejemplos proporcionan más ilustraciones del concepto de subespacio. Los primeros tres son particularmente importantes.

Ejemplo 8 *Las matrices diagonales en* $M_{n\times n}(F)$.

Sea M una matriz de $n \times n$. La diagonal (principal) de M consta de los términos M_{11}, $M_{22}, \ldots, M_{nn}$. Una matriz D de $n \times n$ se llama matriz diagonal si todos los valores que no se encuentran sobre la diagonal de D son nulos, esto es, si $D_{ij} = 0$ para toda $i \neq j$. El conjunto de todas las matrices diagonales en $M_{n\times n}(F)$ es un subespacio de $M_{n\times n}(F)$.

Ejemplo 9 *Los polinomios de grado menor o igual a* n.

Sea n un entero no negativo y sea $\mathcal{P}_n(F)$ un conjunto que consista de todos los polinomios en $\mathcal{P}(F)$ que tengan grado menor o igual que n. (Nótese que el polinomio nulo es un elemento de $\mathcal{P}_n(F)$ pues su grado es -1). Luego $\mathcal{P}_n(F)$ es un subespacio de $\mathcal{P}(F)$.

Ejemplo 10 *Las funciones continuas de valores reales definidas en el eje de los reales* $\mathbb{R}$.

El conjunto $C(\mathbb{R})$ formado por todas las funciones continuas de valor real definidas en R es un subespacio de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Ejemplo 11 *La traza de una matriz* M *de* $n \times n$, *denotada por* $tr(M)$ *es la suma de los valores de* M *ubicados en la diagonal; esto es,* $tr(M) = M_{11} + M_{22} + \ldots + M_{nn}$. *El conjunto de todas las matrices de* $n \times n$ *que tienen una traza igual a cero es un subespacio de* $M_{n\times n}(F)$.

Ejemplo 12 *El conjunto de las matrices de* $M_{m\times n}(F)$ *que únicamente tenga elementos no negativos no es un subespacio de* $M_{m\times n}(F)$ *ya que no se cumple la condición (c) del teorema 3.*

1.2.1. Operaciones sobre los sub-espacios vectoriales.

Intersección

Los dos teoremas siguientes proporcionan métodos para formar subespacios a partir de otros subespacios.

Teorema 4 *Cualquier intersección de subespacios de un espacio vectorial es un subespacio de V.*
Demostración. *Sea $\mathcal{C}$ un conjunto se subespacios de V y sea W la intersección de estos subespacios. Como cada uno de los subespacios contiene el vector cero, $\mathbf{0} \in W$. Sean $a \in F$ y $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ elementos de W, entonces $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ son elementos de cada subespacio de $\mathcal{C}$, luego $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ es también elemento de cada conjunto de $\mathcal{C}$ y por lo tanto $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ está en W. Similarmente, si $\mathbf{x} \in W$, entonces $\mathbf{x}$ es elemento de cada subespacio de $\mathcal{C}$, luego $a\mathbf{x}$ es elemento de cada subconjunto de $\mathcal{C}$, por lo tanto $a\mathbf{x}$ está en W. Hemos probado que si W es la intersección de subespacios de V, entonces, $\mathbf{0} \in W$, si $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in W$, $\mathbf{x}+\mathbf{y} \in W$ y $a\mathbf{x} \in W$. Por lo tanto, por el teorema 3 W es subespcio de V.* $\blacksquare$

Habiendo demostrado que la intersección de subespacios es un subespacio es lógico considerar la cuestión de si la unión de subespacios es o no un subespacio. Se puede ver fácilmente que la unión de subespacios debe satisfacer las condiciones (a) y (c) del teorema 3 pero no necesariamente la condición (b). De hecho se puede demostar de inmendiato que que la unión de dos subespacios es un subespacio si y sólo si uno de los subespacios es subconjuto del otro. Es normal, sin embargo, pensar que debería de existir un método para combinar ambos subespacios W_1 y W_2 para obtener un subespacio mayor (o sea uno que contenga a W_1 y a W_2). Como sugerimos anteriormente, la clave para encontrar tal subespacio es la condición (b) del teorema 3. Esta observación suguiere considerar la "suma" de dos subespacios (como se define a continuación).

Suma

Definición 4 *Si S_1 y S_2 son dos subconjuntos no vacios de un espacio vectorial V, entonces la suma de S_1 y S_2, que se expresa como S_1+S_2, es el conjunto $\{x+y : x \in S_1 \text{ y } y \in S_2\}$. La suma de cualquier número finito de* *subconjuntos no vacios de V, S_1, S_2,..., S_n se define análogamente como el conjunto*

$$S_1 + S_2 + \ldots + S_n = \{x_1 + x_2 + \ldots + x_n : x_i \in S_i \text{ para } i = 1, 2, \ldots n\}$$

Teorema 5 *Si W_1 y W_2 son subespacios de un espacio vectorial V, entonces $W_1 + W_2$ es un subespacio de V.*
Demostración. *Sean W_1 y W_2 subespacios de V. Como $\mathbf{0} \in W_1$ y $\mathbf{0} \in W_2$, entonces $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} \in W_1 + W_2$.Sean $a \in F$ y $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in W_1 + W_2$, entonces existe $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{y}_1 \in W_1$, y $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{y}_2 \in W_2$ tales que $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ y $\mathbf{y} = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$. Ahora bien*

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) + (\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1) + (\mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2)$$

Como $\mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1 \in W_1$ y $\mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2 \in W_2$, entonces $(\mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1) + (\mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2)$ y por lo tanto $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in W_1 + W_2$. Similarmente $a\mathbf{x} = a(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = a\mathbf{x}_1 + a\mathbf{x}_2$. Como $a\mathbf{x}_1 \in W_1$ y $a\mathbf{x}_2 \in W_2$ $a\mathbf{x} = a(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) \in W_1 + W_2$. Luego, $W_1 + W_2$ es, por el teorema 3, un subespacio de V. ■

Corollario 3 *La suma de cualquier número finito de subespacios de V es un subespacio de V.*

Una clase especial de suma jugará un papel importante en el estudio de los espacios vectoriales. Introduciremos de este concepto es la siguiente definición.

Definición 5 *Se dice que un espacio vectorial V es la suma directa de W_1 y W_2, expresada como $V = W_1 \oplus W_2$, si W_1 y W_2 son subespacios de V tales que $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$ y $W_1 + W_2 = V$.*

Ejemplo 13 *Sea $W_1 = \{(a, 0) : a \in F\}$ y $W_1 = \{(0, b) : b \in F\}$. Luego $F^2 = \{(a, b) : a, b \in F\} = W_1 \oplus W_2$.*

Ejemplo 14 *Una función g de valor real definida en $\mathbb{R}$ se llama función par si $g(-x) = g(x)$ para toda $x \in \mathbb{R}$ y se llama función impar si $g(-x) = -g(x)$ para toda $x \in \mathbb{R}$. Sean W_1 y W_2, respectivamente, los conjutos de todas las funciones pares e impares en $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.*
Demostraremos que $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = W_1 \oplus W_2$. Puede demostrarse fácilmente que W_1 y W_2 son subespacios de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Supóngase que $g \in W_1 \cap W_2$; entonces g es al mismo tiempo una función par e impar. Así $g(-x) = g(x)$ y $g(-x) =$

$-g(x)$ para cada $x \in R$ y, por lo tanto g es la función cero. Por lo tanto $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$. Sea $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ y defínanse g, $h \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ como $g(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)]$ y $h(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$. Entonces g es una función par y h es una función impar, tales que $f = g+h$. De aquí que $f \in W_1 \oplus W_2$. Como f es un elemento arbitrario de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, se tiene que $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = W_1 \oplus W_2$. Esto es, $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ es la suma directa de W_1 y W_2.

Si W_1 y W_2 son subespacios de un espacio vectorial V tales que $W_1+W_2 = V$, entonces, cada elemento de V puede expresarse como la suma de un elemento x_1 en W_1 y un elemento x_2 en W_2. Es posible que puedan existir muchas representaciones semejantes, es decir, muchas x_1 y x_2 tales que la suma de $x_1 + x_2$ sea el mismo elemento de V. Por ejemplo, si

$$W_1 = \left\{(a_1, a_2, a_3) \in F^3 : a_3 = 0\right\} \tag{1.2}$$

y

$$W_2 = \left\{(a_1, a_2, a_3) \in F^3 : a_1 = 0\right\} \tag{1.3}$$

claramente $W_1+W_2 = F^3$. De hecho, para cada $c \in F$, $(b_1, b_2, b_3) = (b_1, b_2 + c, 0) + (0, -c, b_3)$ es una representación de (b_1, b_2, b_3) como la suma de un elemento $(b_1, b_2 + c, 0)$ en W_1 y un elemento $(0, -c, b_3)$ en W_2. Así, en este ejemplo la representación de los de F^3 como las suma de un elementos en W_1 y un elementos en W_2 no es única. Nuestro próximo resultado determina cuándo existe este tipo de unicidad.

Teorema 6 *Sean W_1 y W_2 subespacios de un espacio vectorial V. Entonces V es la suma directa de W_1 y W_2 si y sólo si cada elemento de V puede ser escrito de manera única como $x_1 + x_2$, donde $x_1 \in W_1$ y $x_2 \in W_2$.*

Demostración. *Supongase que $V = W_1 \oplus W_2$. Como $V = W_1 + W_2$ cada elemento de V puede ser expresado como la suma de vectores en W_1 y W_2. Supongase que algún elemento z en V puede ser escrito como $z = x_1 + x_2$ y también como $z = y_1 + y_2$, donde x_1, $y_1 \in W_1$ y x_2, $y_2 \in W_2$. Entonces $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$ y asi $x_1 - y_1 = y_2 - x_2$. Ahora bien $x_1 - y_1 \in W_1$ puesto que x_1, y_1 son elementos de W_1 y análogamente $y_2 - x_2 \in W_2$. Pero como $x_1 - y_1 = y_2 - x_2$ se deduce que $x_1 - y_1 = y_2 - x_2 \in W_1 \cap W_2 = \{0\}$.*

Por lo tanto, $x_1 - y_1 = y_2 - x_2 = 0$, y así $y_1 = x_1$ y $y_2 = x_2$, lo que demuestra la unicidad de la representación de z como la suma de un elemento en W_1 y un elemento en W_2.

La demostración de la proposición reciproca es dejada al estudiante como ejercicio. ■

Ejercicio 8 *Demostrar que* $(aA + bB)^t = aA^t + bB^t$ *para toda* $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(F)$ *y toda* $a, b \in F$.

Ejercicio 9 *Demostrar que* $(A^t)^t = A$ *para toda* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(F)$.

Ejercicio 10 *Demostrar que* $A+A^t$ *es simétrica para cualquier matriz cuadrada* A.

Ejercicio 11 *Verificar que los siguientes conjuntos son suebespacios de* R^3 *bajo la suma y multiplicación por escalares definidas en* R^3.

1. *a)* $W_1 = \{(a_1, a_2, a_3) \in R^3 : a_1 = 3a_2 \text{ y } a_3 = -a_2\}$
   b) $W_2 = \{(a_1, a_2, a_3) \in R^3 : 2a_1 + a_2 + 5a_3 = 0\}$
   c) $W_3 = \{(a_1, a_2, a_3) \in R^3 : 2a_1 - 4a_2 - a_3 = 0\}$

Ejercicio 12 *Sean* W_1, W_2 *y* W_3 *como en el ejercicio anterior. Describir* $W_1 \cap W_2$, $W_1 \cap W_3$ *y* $W_2 \cap W_3$ *y observese que cada una de estas intersecciones es un espacio vectorial.*

Ejercicio 13 *Una matriz* A *de* $m \times n$ *se llama triangulas superior si todos los términos ubicados por debajo de la diagonal valen cero, esto es,* $A_{ij} = 0$, *siempre que* $i > j$. *Verificar que las matrices triangulares superiornes forman un subespacio de* $\mathcal{M}_{m\times n}(F)$.

Ejercicio 14 *Mostrar que* F^n *es la suma directa de los subespacios*

$$W_1 = \{(a_1, \ldots, a_n) \in F^n : a_n = 0\}$$

y

$$W_2 = \{(a_1, \ldots, a_n) \in F^n : a_1 = \ldots = a_{n-1} = 0\}$$

Ejercicio 15 *Demostrar que si* W *es un subespacio de* V *y* $x_1, x_2, .., x_n \in W$, *entonces* $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$ *es un elemento de* W *para cualesquiera escalares* $a_1, a_2, \ldots, x_n$ *en* F.

Ejercicio 16 *Una matriz* M *se llama antisimétrica si* $M^t = -M$. *evidentemente una matriz antisimétrica es cuadrada. Demostrar que el conjunto de todas las matrices antisimétricas de* $n \times n$ *es un subespacio* W_1 *de* $\mathcal{M}_{n\times n}(R)$. *Sea* W_2 *el subespacio de* $\mathcal{M}_{n\times n}(R)$ *consistente de todas las matrices simétricas de* $n \times n$. *Demostrar que* $\mathcal{M}_{n\times n}(R) = W_1 \oplus W_2$.

1.2.2. Sub-espacios vectoriales engendrados.

Definición 6 *Para cualquier vector v de un espacio vectorial V, el conjunto de los multiplos escalares de v:*

$$vF = \{v\alpha \pitchfork \alpha \in F\}$$

es un sub-espacio vectorial de V.

Es mismo el mas pequeño sub-espacio vectorial de V conteniendo v porque cualquier sub-espacio que contiene v tiene que contener sus multiplos, es porque lo llamamos *sub-espacio vectorial engendrado por v*.

Mas generalemente, para $v_1, ..., v_n \in V$, el conjunto C de las combinaciones lineales de $v_1, ..., v_n$:

$$C = \{v_1\alpha_1 + ... + v_n\alpha_n \pitchfork \alpha_1, ..., \alpha_n \in F\}$$

es el mas pequeño sub-espacio vectorial de V conteniendo $v_1, ..., v_n$. El sub-espacio vectorial engendrado por $v_1, ..., v_n$ es notado $sev\langle v_1, ..., v_n\rangle$. Visto la definición de suma de sub-espacios vectoriales, tenemos

$$sev\langle v_1, ..., v_n\rangle = v_1F + ... + v_nF$$

Como $sev\langle v_1, ..., v_n\rangle$ es el mas pequeño sub-espacio vectorial conteniendo $v_1, ..., v_n$, tenemos por cualquier sub-espacio vectorial $W \subset V$:

$$sev\langle v_1, ..., v_n\rangle \subset W \Leftrightarrow v_1, ..., v_n \in W$$

Proposición 7 *Si $v_1, ..., v_n$ y $w_1, ..., w_n$ son dos familias de vectores de V, tenemos*

$$sev\langle v_1, ..., v_n\rangle \subset sev\langle w_1, ..., w_n\rangle$$

si y solo si $v_1, ..., v_n$ son combinaciones lineales de $w_1, ..., w_n$. Y entonces,

$$sev\langle v_1, ..., v_n\rangle = sev\langle w_1, ..., w_n\rangle$$

si y solo si $v_1, ..., v_n$ son combinaciones lineales de $w_1, ..., w_n$ y $w_1, ..., w_n$ combinaciones lineales de $v_1, ..., v_n$

Demostración. Esta proposición es una consecuencia directa del siguiente hecho:

$$sev\,\langle v_1, ..., v_n\rangle \subset sev\,\langle w_1, ..., w_n\rangle$$

si y solo si $v_1, ..., v_n \in sev\,\langle w_1, ..., w_n\rangle$, lo que significa que $v_1, ..., v_n$ son combinaciones lineales de $w_1, ..., w_n$. ■

Ejercicio 17 *(para ir mas alla del curso) Aqui pueden encontrar 3 definiciones de operaciones* $\oplus : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *y* $\odot : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$*. En cuales casos la estructura* $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ *es un espacio vectorial sobre* $\mathbb{R}$*.*

1. $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = \left(\left(\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2}\right)^3, \left(\sqrt[5]{x_1} + \sqrt[5]{x_2}\right)^5\right); (x, y) \odot \alpha = (x\alpha^3, y\alpha^5);$
2. $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, 0)\,; (x, y) \odot \alpha = (x\alpha, 0);$
3. $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (y_1 + y_2, x_1 + x_2)\,; (x, y) \odot \alpha = (y\alpha, x\alpha);$

Ejercicio 18 $\mathbb{C}^2$ *con las operaciones usuales es un espacio vectorial sobre* $\mathbb{C}$ *y un espacio vectorial sobre* $\mathbb{R}$*. ¿Cualquier espacio vectorial complejo puede ser considerado como espacio vectorial real.*

Ejercicio 19 *Sea* E *un espacio vectorial sobre un campo* K *y* $V \subseteq E$*. Cuales de las afirmaciones siguientes son verdaderas, y justificar su decisión. Cuando una afirmación es verdadera , demostrale; cuando es falsa, encontrar un contro-ejemplo.*

1. *Si* V *no es un espacio vectorial de* E*, entonces* $0 \notin V$*.*
2. *Si* $0 \notin V$*, entonces,* V *no es un sub-espacio vectorial de* E*.*
3. *Si* $V \neq \emptyset$ *y que* V *no es un sub-espacio vectorial de* E *entonces para todos* $x, y \in V$ *y para todos* $\alpha, \beta \in K$ *,* $x\alpha + y\beta \notin V$*.*
4. *Si* V *no es un sub-espacio vectorial de* E*, entonces, podemos encontrar* $x, y \in V$ *y* $\alpha, \beta \in K$ *tal que* $x\alpha + y\beta \notin V$*.*
5. *Si podemos encontrar* $x, y \in V$ *y* $\alpha, \beta \in K$ *tal que* $x\alpha + y\beta \notin V$*, entonces* V *no es un sub-espacio vectorial de* E*.*

Ejercicio 20 *Damos algunos ejemplos de espacios vectoriales E sobre un campo K, asi que los vectories $v, v_1, ..., v_n \in E$. Determinar en cada caso si es posible de escribir v como combinaciones lineales de $v_1, ..., v_n$.*

1. $E = \mathbb{R}^3, K = \mathbb{R},\ v = (2,4,6), v_1 = (1,2,3), v_2 = (4,5,6), v_3 = (7,8,9)$;
2. $E = \mathbb{R}[x], K = \mathbb{R}, v = 2+3x+4x^2, v_1 = 1+x, v_2 = x+x^2, v_3 = x^2+x^3$;
3. $E = \mathbb{R}^{2\times 2}, K = \mathbb{R}, v = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;
4. $E = \mathbb{C}^2, K = \mathbb{C},\ v = (1+2i, 3-4i), v_1 = (i,0), v_2 = (0,i)$.
5. $E = \mathbb{C}^2, K = \mathbb{R},\ v = (1+2i, 3-4i), v_1 = (i,0), v_2 = (0,i)$.

Ejercicio 21 *De los siguientes ejemplos, cuales son sub-espacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$:*

1. $A = \{(0,y,0) \pitchfork y \in \mathbb{R}\}$
2. $B = \{(1,y,0) \pitchfork y \in \mathbb{R}\}$
3. $C = \{(x,y,x+y) \pitchfork x,y \in \mathbb{R}\}$
4. $D = \{(x,y,x+1) \pitchfork x,y \in \mathbb{R}\}$
5. $E = \{(x,x^2,x^3) \pitchfork x \in \mathbb{R}\}$
6. $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \pitchfork x+2y-z = 0\}$
7. $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \pitchfork x-y = 2y+3 = z-1\}$
8. $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \pitchfork x^2+y^2+z^2 = 0\}$
9. $I = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \pitchfork x^2+y^2+z^2 = 1\}$
10. $J = \{(x+y,-z,u+t) \in \mathbb{R}^3 \pitchfork x-u = z+t = 2y-t = 0\}$

Ejercicio 22 *En los siguientes ejemplos, cuales son sub-espacios vectoriales de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$:*

1. $A = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \pitchfork \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0\}$

2. $B = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \pitchfork f$ *es creciente o* f *es decreciente*$\}$

3. $C = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \pitchfork f(0) = 0\}$

4. $D = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \pitchfork f(a) = f(b)\}$ *discutir en funcion de los valores de* a *y* b.

Ejercicio 23 *En los siguientes ejemplos, cuales son sub-espacios vectoriales del espacio vectorial complejo* $\mathbb{C}[x]$:

1. $A = \{P \in \mathbb{C}[x]_{\leq 2} \pitchfork P'(0) = 0\}$

2. $B = \{P \in \mathbb{C}[x] \pitchfork P(0) = 2P(1)\}$

Ejercicio 24 *En los siguientes ejemplos, cuales son los sub-espacios vectoriales de* $\mathbb{R}^{2\times 2}$:

1. $A = \{M \in \mathbb{R}^{2\times 2} \pitchfork M$ *es simetrica*$\}$

2. $B = \{M \in \mathbb{R}^{2\times 2} \pitchfork M$ *es invertible*$\}$

3. $C = \{M \in \mathbb{R}^{2\times 2} \pitchfork M_{\ 1,1} = a\}$ *discutir en función de los valores de* a.

Ejercicio 25 *Sea* S *es el conjunto de los* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ *tal que*

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ x + 52y + 37z &= 0 \\ 31x + 1287y + 389z &= 0 \end{aligned}$$

¿S *es un sub-espacio vectorial de* $\mathbb{R}^3$*? Tratar de generalizar a cualquier sistema homogeneo y que pasa en caso de sistema no-homogeneo?*

Ejercicio 26 *(para ir mas alla del curso) Sea* $\mathcal{F} = \{f \pitchfork f$ *es una función* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+\}$. *Definimos*

$$\begin{aligned} f \oplus g &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ : x \longmapsto f(x).g(x) \\ f \odot g &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ : x \longmapsto (f(x))^{\alpha} \end{aligned}$$

donde $f, g \in \mathcal{F}$ *y* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Demostrar que esas operaciones hacen de* $\mathcal{F}$ *un espacio vectorial sobre los reales.¿*$\mathcal{F}$ *es un sub-espacio vectorial de* $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *con las operaciones usuales?*

Ejercicio 27 *(para ir mas alla del curso) Demostrar que* $V = \{(a+bi, -b-ai)$ *tal que* $a, b \in \mathbb{R}\}$ *es un sub-espacio vectorial de* $\mathbb{C}^2$ *considerado como un espacio vectorial real pero que no es un sub-espacio vectorial de* $\mathbb{C}^2$ *considerado como espacio vectorial complejo.*

Ejercicio 28 *¿El unión de dos sub-espacios vectoriales es siempre un sub-espacio vectorial? ¿Si si, demostrarlo. Si no, el unión de dos sub-espacios vectoriales nunca es un sub-espacio vectorial o existe sub-espacios vectoriales tales que su unión nos da un sub-espacio vectorial y otros que no?*

Ejercicio 29 *(para ir mas alla del curso) Demostrar por inducción sobre* k *que una suma* $V_1 + ... + V_k$ *de sub-espacios vectoriales es directa si y solo si* $(V_1 + ... + V_{i-1}) \cap V_i = \{\mathbf{0}\}$ *para todos* $i \in \{2, ..., k\}$.

Ejercicio 30 *Para cada uno de los siguientes grupos de vectores en* R^3*, determine si el primer vector puede o no ser expresado como una combinación de los otros dos.*

1. *a)* $(-2, 0, 3)$, $(1, 3, 0)$, $(1, 4, -1)$.
   b) $(3, 4, 1)$, $(1, -2, 1)$, $(-2, -1, 1)$.
   c) $(-2, 2, 2)$, $(1, 2, -1)$, $(-3, -3, 3)$.

Ejercicio 31 *Para cada uno de los siguientes grupos de polinomios en* $\mathcal{P}_3(R)$*, determine si el primer polinomio puede o no ser expresado como una combinación de los otros dos.*

1. *a)* $x^3 - 3x + 5$, $x^3 + 2x^2 - x + 1$, $x^3 + 3x^2 - 1$.
   b) $x^3 + x^2 + 2x + 13$, $2x^3 - 3x^2 + 4x + 1$, $x^3 - x^2 + 2x + 3$.

Ejercicio 32 *En* F^n *sea* e_j *el vector cuya coordenada* $j-$*ésima es* 1 *y cuyas otras coorenadas son cero. Demostar que* $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ *genera a* F^n.

Ejercicio 33 *Mostrar que* $\mathcal{P}_n(x)$ *es generado por* $\{1, x, x^2 \ldots, x^n\}$.

Ejercicio 34 *Mostrar que las matrices*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad y \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

generan a $\mathcal{M}_{2\times 2}(F)$.

Ejercicio 35 *Demostrar que si*

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ y } M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

Entonces el subespacio generado por $\{M_1, M_2, M_3\}$ *es el conjunto de todas las matrices simétricas de* 2×2.

Ejercicio 36 *Para cualquier elemento* x *de un espacio vectorial, demostrar que* $sev(\{x\}) = \{ax : a \in F\}$. *Interpretar este resultado geométricamente para* $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 37 *Demostrar que un subconjunto* W *de un espacio vectorial* V *es un subespacio de* V, *si y sólo si* $sev(W) = W$.

Ejercicio 38 *Demostar que si* S_1 *y* S_2 *son subconjunto de un espacio vectorial* V *tales que* $S_1 \subseteq S_2$, $sev(S_1) \subseteq sev(S_2)$. *En particular, si* $S_1 \subseteq S_2$ *y* $sev(S_1) = V$, *entonces* $sev(S_2) = V$.

Ejercicio 39 *Demostrar que si* S_1 *y* S_2 *son subconjunto cualesquiera de un espacio vectorial* V, *entonces* $sev(S_1 \cup S_2) = sev(S_1) + sev(S_2)$.

Ejercicio 40 *Sean* S_1 *y* S_2 *subconjunto de un espacio vectorial* V. *Demostrar que* $sev(S_1 \cap S_2) \subseteq sev(S_1) \cap sev(S_2)$. *Dar un ejemplo en el cual* $sev(S_1 \cap S_2)$ *y* $sev(S_1) \cap sev(S_2)$ *sean iguales, y un ejemplo donde sean distintos.*

1.3. Dependencia e Independencia lineal

Consideremos, por ejemplo, el conjunto $S = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \subseteq R^3$, donde $x_1 = (2, -1, 4)$, $x_2 = (1, -1, 3)$, $x_3 = (1, 1, -1)$, y $x_4 = (1, -2, -1)$. Para determinar si es linealmente dependiente debemos ver is existe o no un vector en S que sea una combinación lineal de los otros vectores de S. Ahora bien, el vector x_4 es una combinación lineal de x_1, x_2 y x_3,si y sólo si existen escalares a, b y c tales que

$$x_4 = ax_1 + bx_2 + cx_3$$

es decir, si y sólo si

$$(1, -2, -1) = (2a + b + c, -a - b + c, 4a + 3b - c)$$

Por lo tanto, x_4 es una combinación lineal de x_1, x_2 y x_3 si y sólo si el sistema

$$\begin{aligned} 2a + b + c &= 1 \\ -a - b + c &= -2 \\ 4a + 3b - c &= -1 \end{aligned}$$

tiene solución. Para ver si este sistem de ecuaciones tiene solución procedemos como antes, multiplicamos la segunda ecuación por -1 y la intercambiamos con la primer ecuación

$$\begin{aligned} a + b - c &= 2 \\ 2a + b + c &= 1 \\ 4a + 3b - c &= -1 \end{aligned}$$

restando 2 veces la primera a la segunda y 4 veces a la tercera

$$\begin{aligned} a + b - \ c &= 2 \\ -b + 3c &= -3 \\ -b + 3c &= -9 \end{aligned}$$

y por último, restando las dos últimas ecuaciones obtenemos la ecuacion inconsistente $0 = -6$. Por lo que el sistema no tiene solución.

Como el sistema

$$\begin{aligned} 2a + b + c &= 1 \\ -a - b + c &= -2 \\ 4a + 3b - c &= -1 \end{aligned}$$

no tiene solución, x_4 no es combinación lineal de x_1, x_2 y x_3. Sin embargo, el hecho de x_4 no sea una combinación lineal de x_1, x_2 y x_3 no indica que el conjunto S no sea linealmente dependiente, pues falta verificar que si x_1, x_2 y x_3 se pueden escribir o no, como una combinación lineal de los otros vectores en S. Puede demostrarse de hecho que x_3 es una combinación lienal de x_1, x_2 y x_4; especificamente $x_3 = 2x_1 - 3x_2 + 0x_4$. Así, S es linealmente dependiente. Independencia lineal.

Definición 7 *Un subconjunto S de un espacio vectorial V es linealmente dependiente si existe un número finito de vectores, x_1, $x_2, \ldots, x_n$ en S y escalares a_1, $a_2, \ldots, a_n$ en F, no todos cero, tales que $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0$. Tambien se puede describir esta situación diciendo que los elemenyos de S son linealmente dependientes.*

Para demostrar que el conjunto S definido anteriormente es linealmente dependiente, debemos encontrar escalares, a_1, a_2, a_3, a_4 no todos cero, tales que

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0$$

es decir tales que

$$(2a_1 + a_2 + a_3 + a_4, -a_1 - a_2 + a_3 - 2a_4, 4a_1 + 3a_2 - a_3 - a_4) = (0, 0, 0)$$

Por ello debemos encontrar una solución para sistema

$$\begin{aligned} 2a_1 + a_2 + a_3 + a_4 &= 0 \\ -a_1 - a_2 + a_3 - 2a_4 &= 0 \\ 4a_1 + 3a_2 - a_3 - a_4 &= 0 \end{aligned}$$

donde no todas las incongintas valen cero. Como para el caso propuesto antes sabemos que $x_3 = 2x_1 - 3x_2 + 0x_4$, se tiene que $2x_1 - 3x_2 - x_3 + 0x_4$. De aquí tenemos que $a_1 = 2$, $a_2 = -3$, $a_3 = -1$ y $a_4 = 0$ es dicha solución.

Por lo tanto se ve que la definición establecida de dependencia lineal, requiere de la solución de únicamente un sistema de ecuaciones en vez de más. Puede verse fácilmente que, en cualquier espacio vectorial, un subconjunto S que contenga al vector cero debe ser linealmente dependiente. Como $1 \cdot 0 = 0$, el vector cero es una combinacion lineal de elementos de S en la que algún coeficiente es no nulo.

Ejemplo 15 *Determinar si el conjunto* $S = \{(1, 3, -4, 2), (2, 2, -4, 0), (1, -3, 2, -4)\}$ *en* R^4 *es linealmente dependiente o no.*

Solución 1 *Puesto que*

$$4(1, 3, -4, 2) - 3(2, 2, -4, 0) + 2(1, -3, 2, -4) = (0, 0, 0, 0)$$

S *es linealmente dependiente.*

Definición 8 *Se dice que un subconjunto* S *de un espacio vectorial, que no sea linealement dependiente, es linealmente independiente o libre. Como antes, describiremos esta situación diciendo que los elementos de* S *son linealmente independientes.*

Nótese que el conjunto vacio es linealmente independiente, puesto queobviamente, los conjuntos linealmente dependientes deben ser no vacios. Más aún, en cualquier espacio vectorial, un conjunto integrado por un solo vector no nulo es linealmente independiente. Si $\{x\}$ es linealmente dependiente, entonces

$$ax = 0$$

para algún escalar a no nulo. luego

$$x = a^{-1}(ax) = a^{-1}0 = 0.$$

Proposición 8 *un conjunto S es linealmente independiente si y sólo si las únicas combinaciones lineales de elementos de S iguales a cero son las combinaciones lineales triviales en donde todos los escalares son cero.*

Este hecho proporciona un método muy útil para determinar si un conjunto finito es linealmente independiente. Esto se ilustra en el siguiente ejemplo.

Definición 9 *Sea $(e_1, ..., e_n)$ una sucesión de vectores de V, espacio vectorial sobre un campo F, se dice que la sucesión $(e_1, ..., e_n)$ es una sucesión generadora o generatriz de V si el sub-espacio engendrado por los vectores de esta sucesión es V :*

$$sev\langle e_1, ..., e_n\rangle = E$$

lo que significa que todo vector $x \in V$ es una combinacion lineal de $e_1, ..., e_n$:

$$x = \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n$$

Ejemplo 16 *Sea x_k el vector en F^n cuyas primeras $k-1$ coordenadas son ceros y cuyas últimas $n-k+1$ coodenadas son 1. Entonces $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ es linealmente independiente.*

Solución 2 *Tomando una combinación lineal e igualando a cero tenemos*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0.$$

Igualando las coordenadas correspondientes de la izquierda y derecha de esta igualdad tenemos el siguiente sistema de acuaciones.

$$\begin{cases} a_1 & & & & = & 0 \\ a_1 & +a_2 & & & = & 0 \\ a_1 & +a_2 & +a_3 & & = & 0 \\ . \\ . \\ . \\ a_1 & +a_2 & +a_3 & \ldots + a_n & = & 0 \end{cases}$$

Claramente se ve la única solución de este sistema de ecuaciones es $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$.

Los siguientes resultados son consecuencias inmediatas de las definiciones de dependencia e independencia lineal.

Teorema 9 *Sea* V *un espacio vectorial y sea* $S_1 \subseteq S_2 \subseteq V$*. Si* S_1 *es linealmente dependiente, entonces* S_2 *también lo es*

Corolario 4 *Sea* V *un espacio vectorial y sea* $S_1 \subseteq S_2 \subseteq V$*. Si* S_2 *es linealmente independiente, entonces* S_1 *también lo es.*

Ejercicio 41 *Decir si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas.*

1. *a*) Si S es un conjunto linealmente dependiente, cada elemento de S es una combinación lineal de otros elementos de S.

   b) Cualquier conjunto que contenga al vector cero es linealmente dependiente.

   c) El conjunto vacio es linealmente dependiente.

   d) Subconjuntos de conjuntos linealmente dependientes son linealmente dependientes.

   e) Subconjuntos de conjuntos linealmente independientes son linelamente independientes.

   f) Si x_1, $x_2, \ldots$, x_n, son linealmente independientes y $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0$ todos los escalares a_i son iguales a cero.

Ejercicio 42 *En* F^n *sea* e_j *el vector cuya coordenada* $j-$ *ésima es* 1 *y cuyas otras coorenadas son cero. Demostar que* $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ *es linealmente independientes.*

Ejercicio 43 *Demostrar que el conjunto* $\{1, x, x^2 \ldots, x^n\}$ *es linealmente independientes.*

Ejercicio 44 *Mostrar que las matrices*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad y \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

son linealmente independientes.

Ejercicio 45 *Encontrar el conjunto de matrices diagonales linealmente independientes que generan al espacio vectorial de matrices diagonales de* 2×2.

Ejercicio 46 *Demostrar que* $\{x, y\}$ *es linealmente dependiente si y sólo si* x *o* y *es un multiplo del otro.*

Ejercicio 47 *Dar un ejemplo de tres vectores linelamente dependientes en* $\mathbb{R}^3$ *tales que ninguno de los tres sea multiplo de otro.*

Ejercicio 48 *(a) Demostrar que* $\{u, v\}$ *es linealmemente independiente si y sólo* $\{u - v, u + v\}$ *es linealmente independiente.*
(b) Demostrar que $\{u, v, w\}$ *es linealmente independiente si y sólo si* $\{u + v, u + w, v + w\}$ *es linealmente independiente.*

Ejercicio 49 *Demostrar que un conjunto* S *es linealmente dependiente si y sólo si* $S = \{0\}$ *o si existen vectores distintos* y, x_1, $x_2, \ldots, x_n$ *en* S, *tales que* y *es una combinación lineal de* x_1, $x_2, \ldots, x_n$.

Ejercicio 50 *Sea* $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ *un conjunto finito de vectores. Demostrar que* S *es linealmente dependiente si y sólo* $x_k = 0$ *o* $x_{k+1} = L(\{x_1, x_2, \ldots, x_k\})$ *para algun* $k < n$*.Demostrar que un conjunto* S *de vectores es linealmente independiente si y sólo si cada subconjunto finito de* S *es linealmente independiente.*

Ejercicio 51 *Sea* M *una matriz cuadrada triangular superior que tenga terminos no nulos en la diagonla. Demostrar que las columnas de* M *son linealmente independientes.*

Ejercicio 52 *Sean* f *y* g *funciones definidas por* $f(t) = e^{rt}$ *y* $g(t) = e^{st}$, *donde* $s \neq r$. *Demostrar que* f *y* g *son linealmente independientes en* $\mathcal{F}(R, R)$.
Sugerencia*: Suponer que* $ae^{rt} + be^{st} = 0$. *Hacer* $t = 0$ *y obtener una ecuación que involucre a* a *y* b. *Luego diferenciar* $ae^{rt} + be^{st} = 0$, *y hacer* $t = 0$ *para obtener una seguna ecuación en* a *y* b. *Resolver ambas ecuaciones para* a *y* b.

1.4. Bases y Dimensión

Un subconjunto S de un espacio vectorial V que sea linealmente independiente y que genere a V posee una propiedad muy interesante: cada elemento de V puede ser expresado como una y sólo una combinación lineal de elementos de S. Es este resultado el que hace que los conjuntos generadores linealmente independendientes sean los elementos constructivos de los espacios vectoriales.

Definición 10 *Una base β para un espacio vectorial V es un subconjunto linealmente independiente de V que genera V. (Si β es una base de V, diremos que los elementos de β forman una base de V.)*

Ejemplo 17 *Recordando que $L(\oslash) = \{0\}$, se dice que $\oslash$ es una base para el espacio vectorial $\{0\}$.*

Ejemplo 18 *En F^n, sea $e_1 = (1,0,0,\ldots,0,0)$, $e_2 = (0,1,0,\ldots,0,0),\ldots,e_n = (0,0,0,\ldots,0,1)$; se ve claramente que $\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ es una base para F^n y se llama base estándar para F^n.*

Ejemplo 19 *En $\mathcal{M}_{m\times n}(F)$ sea M^{ij} la matriz cuyo único elemento no nulo es un 1 en el $i-$ésimo renglón y $j-$ésima columna. Luego $\{M^{ij} :\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n\}$ es una base para $\mathcal{M}_{m\times n}(F)$.*

Ejemplo 20 *En $\mathcal{P}_n(F)$ el conjunto $\{1,x,x^2,\ldots,x^n\}$ es una base.*

Ejemplo 21 *En $\mathcal{P}(F)$ el conjunto $\{1,x,x^2,\ldots\}$ es una base.*

Obsérvese que en el ejemplo 21 muestra que una base no nesesariamente debe ser finita. De hecho, veremos más adelante, en esta sección que ninguna base de $\mathcal{P}(F)$ puede ser finita. Entonces no todo espacio vectorial tiene una base finita.

El siguiente teorema, que se utilizará frecuentemente en el capítulo siguiente, muestra la propiedad más importante de una base.

Teorema 10 *Sea V un espacio vectorial y $\beta = \{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ un subconjunto de V. Luego β es una base de V si y sólo si cada vector y en V puede ser expresado de manera única como una combinación lineal de vectores de β, es decir, puede ser expresado en la forma*

$$y = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$$

para escalares únicos $a_1, a_2, \ldots, a_n$.
Demostración. *Sea β una base de V. Si $y \in V$, entonces $y \in L(\beta)$, puesto que $L(\beta) = V$. Luego y es una combinación lineal de los elementos de V. Supongamos que*

$$y = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$$

y

$$y = b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_nx_n.$$

son dos posibles representaciones de y. Restando la segunda igualdad a la primera se tendra

$$0 = (a_1 - b_1)\, x_1 + (a_2 - b_2)\, x_2 + \ldots + (a_n - b_n)\, x_n.$$

Como β es linealmente independiente, se tendrá que los coeficientes de esta combinación lineal deben ser cero, $a_1 - b_1 = a_2 - b_2 = \ldots a_n - b_n = 0$. Luego $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \ldots, a_n = b_n$.

Para demostrar el reciproco, supongamos que cada elemento de V se puede expresar de manera única como una combinación lineal de elementos de β

$$y = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n.$$

En particular tenemos que

$$0 = 0x_1 + 0x_2 + \ldots 0x_2 \tag{1.4}$$

y como esta combinación lineal es única, se tiene que β es linealmente independiente y genera V, luego β es una base de V. ∎

El teorema 10 muestra que cada vector v en un espacio vectorial con una base $\beta = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ puede ser expresado de manera única en la forma $v = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$ para escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n$ seleccionados adecuadamente. Luego, v determina una única $n-dimensional$ de escalares $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y, reciprocamente, cada $n-dimensional$ de escalares determina un único v, al utilizar los términos de los $n-dimensional$ como los coeficientes de una combinación lineal de elementos de β. asi definimos una biyección entre V y F^n, esta biyección se llama *isomorfismo de espacios vectoriales de V en F^n*. Este hecho sugiere que V es similar al espacio vectorial F^n, donde n es el número de vectores en una base para V. Nuestro próximo teorema identificará una gran clase de espacios vectorial, cada uno de ellos con una base finita. Sin embargo, es necesario probar primero un resultado preliminar.

Lemma 11 *Sea S un subconjunto linealmente independiente de un espacio vectorial V, y sea x un elemento de V que no está en S. Luego $S \cup \{x\}$ es linealmente dependiente si y sólo si $x \in sev \langle S \rangle$.*
Demostración. *Si $S \cup \{x\}$ es linealmente dependiente, deberán existir vectores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en $S \cup \{x\}$ y escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n$ no nulos tales que*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0.$$

Como S es linealmente independiente, uno de los x_i debe ser x (de otra forma los coeficientes de la combinación deberán ser cero, por independencia lineal), digamos x_1, es igual a x, entonces

$$a_1x + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0$$

y asi $x = a_1^{-1}(-a_2x_2 - \ldots - a_nx_n)$. Como x es una combinación lineal de elementos de S, $x \in L(S)$.

Reciprocamente, supongamos que $x \in L(S)$. Luego, existen vectores $x_1, x_2, \ldots, x_n \in S$ y escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tales que

$$x = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n.$$

Asi

$$0 = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + (-1x),$$

y como $x \neq x_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, x\}$ es linealmente dependiente. Por tanto $S \cup \{x\}$ es linealmente dependiente por el teorema 9. ■

Teorema 12 *Si un espacio vectorial es generado por un conjunto finito S_0, entonces un subconjunto de S_0 es una base para V. Y por lo tanto V tiene una base finita.*
Demostración. *Si $S_0 = \oslash$ o $S_0 = \{0\}$, entonces $V = \{0\}$ y $\oslash$ es un subconjunto de S_0 que es una base para V. De lo contrario S_0 contendrá un elemento x_1 no nulo. Nótese que $\{x_1\}$ es un conjunto linealmente independiente. Continúese, si es posible, escogiendo elementos $x_2, \ldots, x_r$ en S_0 tales que $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ sea linealmente independientes. Como S_0 es un conjunto finito, se debe alcanzar una etapa en la $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ sea un subconjunto linealmente independiente de S_0 pero que al añadir a S cualquier elemento de S_0 que no esté en S se produzca un conjunto linealmente dependiente. Demostraremos entonces que S es una base para V. Como S es linealmente independiente, es suficiente con demostrar que $sev(S) = V$, pero*

como $sev(S_0) = V$*, de acuerdo con el teorema* **??** *es suficiente con mostrar que* $S_0 \subseteq sev(S)$ *ya que el espacio vectorial más pequeño que contiene a* S_0 *es* $sev(S_0) = V$*. Sea* $x \in S_0$*. Si* $x \in S$*, entonces evidentemente* $x \in sev(S)$*. De otra forma, si* $x \notin S$*, la construcción anterior de* S*, muestra que* $S \cup \{x\}$ *es linealmente dependiente. Así* $x \in sev(S)$*, de acuerdo con el lema anterior y, por lo tanto* $S_0 \subseteq sev(S)$*.* ■

El método por el cual se obtuvo la base S en la demostarción anterior es una manera muy útil de obtener bases. Un ejemplo de este procedimiento se da a continuación.

Ejemplo 22 *Los elementos* $(2, -3, 5)$*,* $(8, -12, 20)$*,* $(1, 0, -2)$*,* $(0, 2, -1)$ *y* $(7, 2, 0)$ *generan* $\mathbb{R}^3$*. Encontrar una base a partir de estos vectores.*

Solución 3 *Para empezar seleccionamos un vector no nulo del conjunto generatriz, digamos* $(2, -3, 5)$*, como uno de los elementos de la base. Como* $4(2, -3, 5) = (8, -12, 20)$*, el conjunto*

$$\{(2, -3, 5), (8, -12, 20)\}$$

es linealmente dependiente. Por tanto $(8, -12, 20)$ *no será incluido en nuestra base. Como* $(1, 0, -2)$ *no es multiplo de* $(2, -3, 5)$ *y viceversa, el conjunto*

$$\{(2, -3, 5), (1, 0, -2)\}$$

es linealmente independiente. Por lo tanto $(1, 0, -2)$ *puede ser incluido en la base. Procediendo con el siguiente elemento del conjunto generatiz, se deberá excluir o incluir en nuestra base al elemento* $(0, 2, -1)$ *dependiendo de que el conjunto*

$$\{(2, -3, 5), (1, 0, -2), (0, 2, -1)\}$$

sea linealmente dependiente o linealmemente independiente. Un cálculo sencillo muestra que el conjunto es linealmente independiente; luego $(0, 2, -1)$ *también será incluido en nuestra base. El elemento final del conjunto generatriz* $(7, 2, 0)$ *será excluido o includio en la base dependiendo de que*

$$\{(2, -3, 5), (1, 0, -2), (0, 2, -1), (7, 2, 0)\}$$

sea linealmente dependiente o linealmente independiente. Ya que

$$2(2, -3, 5) + 3(1, 0, -2) + 4(0, 2, -1) - (7, 2, 0) = (0, 0, 0)$$

el conjunto es linealmente dependiente y se excluye de la base. De esta manera, el conjunto $\{(2, -3, 5), (1, 0, -2), (0, 2, -1)\}$ *es una base para* R^3*.*

El siguiente teorema y sus corolarios son quizá los resultados más importantes de este capítulo.

Teorema 13 *Sea V un espacio vectorial que tiene una base β con exactamente n elementos. Sea $S = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ un subconjunto linealmente independiente de V que contenga exactamente m elementos, donde $m \leq n$. Entonces , existe un subconjunto S_1 de β que contiene exactamente $n - m$ elementos tales que $S \cup S_1$ genera a V.*

Demostración. *La demostración de este teorema se hará por inducción matemática sobre m. Principiaremos la inducción con $m = 0$, pues en este caso $S = \{\oslash\}$, y así $S_1 = \beta$ satisface claramente la conclusión del teorema. Ahora, supongamos que el teorema es cierto para alguna m tal que $m < n$. Dostraremos que si esto ocurre, entonces también el teorema es cierto para $m+1$. Sea $S = \{y_1, y_2, \ldots, y_m, y_{m+1}\}$ un subconjunto de V linealmente independiente, el cual contiene exactamente $m+1$ elementos. Como S es linealmente independiente, por el corolario 4 del teorema 9, $\{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ también lo es, aplicamos la hipótesis de inducción para concluir que, si existe un subconjunto $\{x_1, x_2, \ldots, x_{n-m}\}$ de β tal que $\{y_1, y_2, \ldots, y_m\} \cup \{x_1, x_2, \ldots, x_{n-m}\}$ genera a V, entonces para $S = \{y_1, y_2, \ldots, y_m, y_{m+1}\}$ existe un $S_1 \subseteq \beta$ con exactamente $m - n - 1$ elementos, tal que $S \cup S_1$ genera a V. Por lo tanto existen escalares $a_1, a_2, \ldots, a_m$ y $b_1, b_2, \ldots, b_{n-m}$ tales que*

$$y_{m+1} = a_1 y_1 + a_2 y_2 + \ldots + a_m y_m + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + b_{n-m} x_{n-m}. \tag{1.5}$$

Obsérvese que al menos un b_i es distinto de cero, pues de lo contrario y_{m+1} sería un combinación lineal de $\{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ contradiciendo el hecho de $\{y_1, y_2, \ldots, y_m, y_{m+1}\}$ es linealmente independiente. Supongamos que b_1 es no nulo, luego resolviendo para x_1 de la ecuación (1.5)

$$\begin{aligned} x_1 = &+ \left(-b_1^{-1} a_1\right) y_1 + \ldots + \left(-b_1^{-1} a_m\right) y_m - (-b_1^{-1}) y_{m+1} + \\ &\left(-b_1^{-1} a_2\right) x_2 + \ldots + \left(-b_1^{-1} a_{n-m}\right) x_{n-m}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Entonces $x_1 \in sev(\{y_1, \ldots, y_m, y_{m+1}, x_2, \ldots, x_{n-m}\})$ de acuerdo con la ecuación (1.6), pero como $y_1, \ldots, y_m, x_2, \ldots, x_{n-m}$ son claramente elementos de $sev(\{y_1, \ldots, y_m, y_{m+1}, x_2, \ldots, x_{n-m}\})$, se tendrá que

$$\{y_1, \ldots, y_m, x_1, x_2, \ldots, x_{n-m}\} \subseteq sev(\{y_1, \ldots, y_m, y_{m+1}, x_2, \ldots, x_{n-m}\}). \tag{1.7}$$

Como sev$(\{y_1, \ldots, y_m, y_{m+1}, x_2, \ldots, x_{n-m}\}$ *es un espacio vectorial que contiene a* $\{y_1, \ldots, y_m, x_1, x_2, \ldots, x_{n-m}\}$ *pero por el teorema* **??** *el espacio vectorial más pequeño que contiene a* $\{y_1, \ldots, y_m, x_1, x_2, \ldots, x_{n-m}\}$ *es V. Luego entonces el espacio generado por* $\{y_1, \ldots, y_m, y_{m+1}, x_2, \ldots, x_{n-m}\}$ *es* V*. Entonces , el escoger* $S_1 = \{x_2, \ldots, x_{n-m}\}$ *demuestra que el teorema es cierto para* $m+1$. ■

Para ilustrar el teorema 13, nótese que $S = \{x^2 - 4, x - 6\}$ es un subconjunto linealmente independiente de $\mathcal{P}_2(F)$. Como $\beta = \{1, x, x^2\}$ es una base de $\mathcal{P}_2(F)$, deberá de existir un subconjunto S_1 de β que contenga $3 - 2 = 1$ elementos tal que $S \cup S_1$ genere a $\mathcal{P}_2(F)$. En este ejemplo, cualquier subconjunto β que contenga un elemento será suficiente para S_1. Con esto se ve que el conjunto S_1 del teorema 13 no necesariamente es único.

Corollario 5 *Sea* V *un espacio vectorial que tiene una base* β *que contiene exactamente* n *elementos. Entonces cualquier subconjunto linealmente independiente de* V *que contenga exactamente* n *elementos es una base de* V
Demostración. *Sea* $S = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ *un subconjunto linelamente independiente de* V *con exactamente* n *elemento y* β *una base de* V *con exactamente* n *elementos. Luego por el Teorema 13 existe un subconjutno* S_1 *de* β *con* $n - n = 0$ *elementos, tal que* $S \cup S_1$ *genera a V. Pero como* S_1 *tiene 0 elementos* $S_1 = \oslash$*. Entonces* $S \cup S_1 = S$ *genera a* V *y como* S *es linealmente independiente,* S *es una base para* V*.* ■

Ejemplo 23 *Los vectores* $(1, -3, 2)$, $(4, 1, 0)$ *y* $(0, 2, -1)$ *forma una base para* R^3*, ya que si*

$$a_1(1, -3, 2) + a_2(4, 1, 0) + a_3(0, 2, -1) = 0$$

a_1*,* a_2 *y* a_3 *deberán satisfacer el sistema de ecuaciones*

$$\left\{ \begin{array}{cccc} a_1 & +4a_2 & & = & 0 \\ -3a_1 & +a_2 & +2a_3 & = & 0 \\ 2a_1 & & -a_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

Que tiene por única solución $a_1 = a_2 = a_3 = 0$*. Entonces* $(1, -3, 2)$, $(4, 1, 0)$ *y* $(0, 2, -1)$ *son linealmente independientes y, de acuerdo con el corolario 5 forman una base para* R^3*.*

Corollario 6 *Sea V un espacio vectorial que tiene una base β con exactamente n elementos. Entonces cualquier subconjunto de V que contenga más de n elementos es linealmente dependiente. Consecuentemente, cualquier subconjunto de V linealmente independiente tiene como máximo n elementos.*

Demostración. *Sea S un subconjunto de V que contiene más de n elementos. Con el fin de llegar a una contradicción supongamos que S es linealmente independiente. Sea S_1 un subconjunto cualquiera de S con exactamente n elementos. Entonces, de acuerdo con el corolario anterior, S_1 es una base de V. Como S_1 es un subconjunto propio de S, podemos tomar un elemento x en S que no sea elemento de S_1. Como S_1 es un es una base de V, $x \in sev(S_1) = V$. Luego, el lema previo al teorema 12 implica que $S_1 \cup \{x\}$ es linealmente dependiente. Pero $S_1 \cup \{x\} \subseteq S$; luego, por el teorema 9 S es linealmente dependiente —una contradicción. Se concluye, por tanto que S es linealmente dependiente.* ■

Ejemplo 24 *Sea $S = \{x^2 + 7, 8x^2 - 2x, 4x - 3, 7x + 2\}$. Aun cuando se puede demostrar directamente que S es un subconjunto linealmente dependiente de $\mathcal{P}_2(F)$, esta conclusión se deriva inmediatamente del corolario anterior puesto que $\beta = \{1, x, x^2\}$ es una base para $\mathcal{P}_2(F)$ que contiene menos elementos que S.*

Corollario 7 *Sea V un espacio vectorial que tiene una base β con exactamente n elementos. Entonces toda base de V contendrá exactamente n elementos.*

Demostración. *Sea S una base de V. Como S es linealmente independiente tendrá como máximo, de acuerdo con el corolario 6, n elementos. Supóngase que S contiene exactamente m elementos; luego $m \leq n$. Pero además S es una base de V y β es un subconjunto linealmente independiente de V. Entonces, el corolario 6 puede ser aplicado intercambiando los papeles de β y S para dar $n \leq m$. Luego $m = n$.* ■

Si un espacio vectorial tiene una base con un número finito de elementos , entonces el corolario anterior establece que el número de elementos en cada base es el mismo. Este resultado hace posible las siguiente definición.

Definición 11 *Un espacio vectorial V se llama dimensionalmente finito si tiene una base con un número finito de elementos; el único número de elementos en cada base de V se llama dimesión de V y se denota por* $\dim(V)$. *Si un espacio vectorial V no es dimensionalmente finito, se llama dimensionalmente infinito.*

Ejemplo 25 *El espacio vectorial {0} tiene dimensión cero.*

Ejemplo 26 *El espacio vectorial* F^n *tiene dimensión* n.

Ejemplo 27 *El espacio vectorial* $\mathcal{M}_{m\times n}(F)$ *tiene dimensión* mn.

Ejemplo 28 *El espacio vectoarial* $\mathcal{P}_n(F)$ *tiene dimensión* $n+1$.

Ejemplo 29 *El espacio vectorial* $\mathcal{P}(F)$ *es dimensionalmente infinito.*

Los siguientes dos ejemplos demuestran que la dimensión de un espacio vectorial depende de su campo de escalares.

Ejemplo 30 *El espacio vectorial de los números complejo tiene dimensión 1 sobre el campo de los números complejos. (Una base es* $\{1\}$*).*

Ejemplo 31 *El espacio vectorial de los números complejos tiene dimensión 2 sobre el campo de los números reales. (Una base es* $\{1, i\}$*).*

Corollario 8 *Sea* V *un espacio vectorial de dimensión* n*, y sea* S *un subconjunto de* V *que genera a* V *y contiene como máximo* n *elementos. Entonces* S *es una base para* V *y contiene exactamente* n *elementos.*
Demostración. *Existe un subconjunto* S_1 *de* S *tal que* S_1 *es una base de* V *(Teorema 12) Por el corolario 7* S_1 *contiene exactamente* n *elementos. Pero* $S_1 \subseteq S$ *y* S *contiene como máximo* n *elementos, luego* $S = S_1$ *y* S *es una base de* V*.* ■

Ejemplo 32 *Se tiene del corolario 8 que* $\{x^2+3x-2, 2x^2+5x-3, -x^2-4x+4\}$ *es un base para* $\mathcal{P}_2(R)$.

Ejemplo 33 *Se tiene del corolario 8 que*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

forma una base de $\mathcal{M}_{2\times 2}(R)$.

Corollario 9 *Sea β una base de un espacio vectorial V de dimensión n y sea S un subconjunto linealmente independiente de V que contiene m elementos. Entonces, existe un subconjunto S_1 de β tal que $S_1 \cup S$ es una base de V.*
Demostración. *Por el corolario 6 del teorema 13 sabemos que $m \leq n$. Entonces, por el teorema 13 existe un sunconjunto S_1 de β que contiene exactamente $m - n$ elementos tal que $S_1 \cup S$ genera a V. Es evidente que $S_1 \cup S$ contiene a lo más n elementos; asi, el corolario 8 implica que $S_1 \cup S$ es una base de V.* ■

Los teoremas 12 y 13 y sus cinco corolarios contienen toda una riqueza de información acerca de las relaciones entre conjuntos linealmente independientes, bases y conjuntos generatrices. Por esa razón resumiremos los resultados principales de esta sección para situarlos en una mejor perspectiva.

Una base de un espacio vectorial V es un subconjunto linelamente independiente de V que genera a V. Si V tiene una base V tiene una base finita, entonces cualquier base de V contiene el mismo número de vectores. Este número se llama dimensión de V, y se dice que V es dimensionalemente finito. Luego, si la dimensión de V es n, toda base para V contiene exactamente n vectores. Además, todo subconjunto de V linealmente independiente contiene no más de n vectores. y puede ser tomado como un abase para V mediante la inclusión de vectores adecuadamente escogidos. Por otra parte, todo conjunto generatriz de V contiene como mínimo n vectores y puede ser transformado en una base de V eliminando adecuadamente algunos de los vectores.

Ejemplo 34 *El siguiente ejemplo ilustra cómo puede utilizarse estos resulatdos para obtener una importante conclusión no trivial.*

Sean $c_0, c_1, \ldots, c_n$ elementos distintos de un campo F. Los polinomios $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_n(x)$, donde

$$\begin{aligned} f_i(x) &= \frac{(x - c_0)\ldots(x - c_{i-1})\,(x - c_{i+1})\ldots(x - c_n)}{(c_i - c_0)\ldots(c_i - c_{i-1})\,(c_i - c_{i+1})\ldots(c_i - c_n)} \\ &= \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{(x - c_j)}{(c_i - c_j)} \end{aligned}$$

Se llaman polinomios de Lagrange (asociados a $c_0, c_1, \ldots, c_n$). Tomando a $f_i(x)$ como una función polinomial $f_i : F \to F$ se ve que

$$f_i(c_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \tag{1.8}$$

Se utilizará esta propiedad de los polinomias de Lagrange para demostrar que $\beta = \{f_0, f_1, \ldots, f_n\}$ es un subconjunto linealmente independiente de $\mathcal{P}_n(F)$ Como la dimensión de $\mathcal{P}_n(F)$ es $n+1$ se tendrá del corolario 5 teorema 13 que β es una base de $\mathcal{P}_n(F)$. Para demostrar que β es linealmente independiente, supóngase que

$$\sum_{i=0}^{n} a_i f_i = 0 \qquad \text{para algunos escalares } a_0, a_1, \ldots, a_n,$$

donde 0 es la función cero. Entonces

$$\sum_{i=0}^{n} a_i f_i(c_j) = 0 \qquad \text{para } j = 0, 1, \ldots, n.$$

Pero también

$$\sum_{i=0}^{n} a_i f_i(c_j) = a_j$$

por la ecuación (1.8). De aqui que $a_j = 0$ para $j = 0, 1, \ldots, n$ y se tiene que β es linealmente independiente.

Como β es una base para $\mathcal{P}_n(F)$, toda función polinomial en $\mathcal{P}_n(F)$ es una combinación lineal de elementos de β, esto es

$$g = \sum_{i=0}^{n} b_i f_i.$$

Entonces

$$g(c_j) = \sum_{i=0}^{n} b_i f_i(c_j) = b_j.$$

así

$$g = \sum_{i=0}^{n} b_i f_i.$$

es la representación única de g como combinación lineal de elementos de β. Esta representación se llama *ecuación de interpolación de Lagrange.* Véase que el argumento anterior muestra que si $b_0, b_1, \ldots, b_n$ son cualesquiera $n+1$ elementos (no necesariamente distintos), entonces la función polinomial

$$g = \sum_{i=0}^{n} b_i f_i.$$

es el único elemento de $\mathcal{P}_n(F)$ tal que $g(c_j) = b_j$. Luego entonces, hemos encontrado el único polinomio cuyo grado no excede a n que tiene valores especificos b_j en los puntos dados c_j en su dominio ($i = 0, 1, \ldots, n$). Por ejemplo, construyamos el polinomio real de grado máximo 2 cuyas graficas contienen a los puntos $(1, 8)$, $(2, 5)$ y $(3, -4)$. (Luego, en nuestra notación $c_0 = 1$, $c_1 = 2$ y $c_2 = 3$, $b_0 = 8$, $b_1 = 5$ y $b_2 = -4$.) Los polinomios de Lagrange asociados a c_0, c_1 y c_2 son

$$\begin{aligned}
f_0(x) &= \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} = \frac{1}{2}\left(x^2 - 5x + 6\right), \\
f_1(x) &= \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} = -\left(x^2 - 4x + 3\right), \\
f_2(x) &= \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} = \frac{1}{2}\left(x^2 - 3x + 2\right)
\end{aligned}$$

De aquí el polinomio deseado es

$$\begin{aligned}
g(x) &= \sum_{i=0}^{2} b_i f_i = 8f_0(x) + 5f_1(x) - 4f_2(x) \\
&= (4 - 5 - 2)x^2 + (-20 + 20 + 6)x + (24 - 15 - 4) \\
g(x) &= -3x^2 + 6x + 5
\end{aligned}$$

Una consecuencia importante de la ecuación de interpolación de Lagrange es el siguiente resultado: si $g \in \mathcal{P}_n(F)$ y $g(c_i) = 0$ para $n + 1$ elementos diferentes $c_0, c_1, \ldots, c_n$ en F, g será la función cero.

1.5. Bases de sub-espacios vectoriales.

El siguiente resultaado relaciona la dimensión de un subespacio con la dimensión del espacio vectorial que lo contiene.

Teorema 14 *Sea W un subespacio de un espacio vectorial V de dimensión n. Entonces W es dimensionalmente finito y* $\dim(W) \leq n$. *Además, si* $\dim(W) = n$, *entonces $W = V$.*
Demostración. *Si W={0}, entonces W es dimensionalmente finito y* $\dim(W) = 0 \leq n$. *De otra manera existe un elemento no nulo x_1 en W y así $\{x_1\}$ es un conjunto linealmente independiente. Continuando de esta forma, tómense elementos $x_1, x_2, \ldots, x_k$ en W tales que $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ sea linealmente independiente. Este proceso debe terminar en una etapa donde $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ sea linealmente independiente pero de manera que al añadir un elemento de W se tenga un conjunto linealmente dependiente (puesto que ningun subconjunto linealmente independiente de V puede tener más de n elementos). Entonces W tiene una base finita con no más de n elementos; esto es,* $\dim(W) \leq n$.
Si $\dim(W) = n$, *entonces una base para W sería un subconjunto de V linealmente independiente que contuviera n elementos. Pero el corolario 5 del teorema 13 implica que la base para W es también una base para V y se tiene que $W = V$.* ■

Corollario 10 *Si W es un subespacio de un espacio vectorial V dimensionalmente finito, Entonces W tiene una base finita y cualquier base para W es un subconjunto de alguna base para V.*
Demostración. *El teorema muestra que W tiene una base finita S. Si β es una base para V, el teorema 13 dice que existe un subconjunto S_1 de β tal que $S \cup S_1$ es una base para V. De aquí que S es un subconjunto de una base para V.* ■

Podemos utilizar el teorema anterior para analizar geométricamente los subespacios de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

Como $\mathbb{R}^2$ tiene dimensión 2 sobre $\mathbb{R}$, los subespacios de $\mathbb{R}^2$ sólo pueden tener dimensión 0, 1 y 2. Los únicos subespacios de dimensión 0 ó 2 son $\{0\}$ y $\mathbb{R}^2$, respectivamente. Cualquier subespacio de $\mathbb{R}^2$ que tenga dimensión 1 consta de todos los multiplos escalares de algún vector no nulo en $\mathbb{R}^2$.

Si algún punto de $\mathbb{R}^2$ se identifica de manera natural con un punto del plano Euclidiano, entonces es posible describir los subespacio de $\mathbb{R}^2$ geométricamente: Un subespacio de $\mathbb{R}^2$ de dimensión 0 consta del origen del plano Euclidiano, un subespacio de $\mathbb{R}^2$ de dimensión 1 consta de una recta que pasa por el origen y un subespacio que tenga dimensión 2 es todo el plano Euclidio.

Similarmente, los subespacios de $\mathbb{R}^3$ deben tener dimensión 0, 1, 2 ó 3. Interpretando estas posibilidades geométricamente, vemos que un subespacio de dimensión 0 debe ser el origen del sistema coordenado Euclidiano en el espacio. Un subespacio de dimensión 1 es una recta en el espacio que pasa por el origen. Un subespacio de dimensión 2 es un plano que contiene al origen. Y un subespacio de dimensión 3 es el mismo espacio de 3 dimensiones.

Ejemplo 35 *Sea* $W = \{(a_1, a_2, \ldots, a_5) : a_1 + a_3 + a_5 = 0, a_2 = a_4\}$. *Entonces* W *es un subespacio de* F^5 *con* $\{(1,0,0,0-1),\ (0,0,1,0,-1),\ (0,1,0,1,0)\}$ *como base. Luego* W *tiene dimensión 3.*

Ejemplo 36 *El conjunto de las matrices diagonales de* $n \times n$ *forman un subespacio* W *de* $\mathcal{M}_{n\times n}(F)$. *Una base para* W *es* $\{M^{11}, M^{22}, \ldots, M^{nn}\}$ *donde* M^{ij} *es la matriz cuyo único elemento diferente de 0 es un 1 en el* i*-ésimo renglón y* j*-ésima columna. Así, la dimensión de* W *es* n.

Ejemplo 37 *El conjunto de las matrices simétricas de* $n \times n$ *forma un subespacio* W *de* $\mathcal{M}_{n\times n}(F)$. *Una base de* W *es* $\{A^{ij} : 1 \leq i \leq j\}$, *donde* A^{ij} *es la matriz de* $n \times n$ *que tiene un* 1 *en el* $i-$*ésimo renglón y* $j-$*ésima columna, un 1 en* $j-$*ésimo renglón y* $i-$*ésima columna, y 0 en los demás término. Por lo tanto, la dimensión de* W *es* $n + (n-1) + \ldots + 1 = \frac{n}{2}(n+1)$.

Ejemplo 38 *El conjunto de polinomias de la forma* $a_{18}x^{18} + a_{16}x^{16} + \ldots + a_2x^2 + a_0$ *donde* $a_{18}, a_{16}, \ldots, a_2, a_0 \in F$ *componen un subespacio* W *de dimensión 10, puesto que*$\{1, x^2, x^4 \ldots, x^{18}\}$ *es una base de* W.

Si W_1 y W_2 son subespacios de un espacio vectorial V, vimos que también lo son $W_1 \cap W_2$ y $W_1 + W_2$. Es natural preguntarse si las dimensiones de estos subespacios pueden calcularse directamente a partir de las dimensiones de W_1 y W_2. Desafortunadamente esto no es posible. Existe, sin embargo, una relación entre $\dim(W_1 \cap W_2)$, $\dim(W_1 + W_2)$, $\dim(W_1)$, $\dim(W_2)$.

Teorema 15 *Sean* W_1 *y* W_2 *subespacios dimensionalmente finitos de un espacio vectorial V. Entonces* $W_1 + W_2$ *es dimensionalmente finito y*

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2).$$

Demostración. *Como* $W_1 \cap W_2$ *es un subespacio de un subespacio dimensionalmente finito,* W_1, $W_1 \cap W_2$ *tiene una base finita* $\beta_0 = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$

(Teorema 14). Usemos el corolario del Teorema 14 para encontrar $\beta_1 = \{y_1, y_2, \ldots, y_r\}$ *y* $\beta_2 = \{z_1, z_2, \ldots, z_m\}$ *tales que* $\beta_0 \cup \beta_1$ *sea una base para* W_1 *y* $\beta_0 \cup \beta_2$ *sea una base de* W_2*. Demostraremos que* $\beta_0 \cup \beta_1 \cup \beta_2 = \{x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_r, z_1, \ldots, z_m\}$*es una base para* $W_1 + W_2$*. Se seguirá que* $W_1 + W_2$ *es dimensionalmente finito y*

$$\begin{aligned}\dim(W_1 + W_2) &= k + r + s = (k + r) + (k + m) - k \\ &= \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2).\end{aligned}$$

Para demostrar que $\beta_0 \cup \beta_1 \cup \beta_2$ *es una base de* $W_1 + W_2$ *demostaremos primero que* $\beta_0 \cup \beta_1 \cup \beta_2$ *es linealmente independiente. Supongamos que*

$$a_1x_1 + \ldots + a_kx_k + b_1y_1 + \ldots + b_ry_r + c_1z + \ldots + c_mz_m = 0$$

Para algunos escalares $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_r, c_1, \ldots, c_m$*. Sea*

$$v_0 = a_1x_1 + \ldots + a_kx_k, \qquad v_1 = b_1y_1 + \ldots + b_ry_r,$$

y

$$v_2 = c_1z + \ldots + c_mz_m;$$

obsérvese que $v_0 \in W_1 \cap W_2$*,* $v_1 \in W_1$ *y* $v_2 \in W_2$*. La igualdad anterior puede espresarse como* $v_0+v_1+v_2 = 0$; *así,* $v_0+v_1 = -v_2$*. En esta última igualdad el miembro del lado izquierdo es un elemento de* W_1*, mientras que el miembro del lado derecho es un elemento de* W_2*. Entonces* $-v_2$ *es un elemento de* W_1 *como de* W_2*, esto es,* $v_2 \in W_1 \cap W_2$*. Como* $\{x_1, \ldots, x_k\}$ *es una base de* $W_1 \cap W_2$ *existen escalares* $d_1, \ldots, d_k$ *tales que* $-v_2 = d_1x_1 + \ldots + d_rx_k$*. Ahora bien*

$$\begin{aligned}0 &= v_0 + v_1 + v_2 \\ &= (a_1 - d_1)\, x_1 + \ldots + (a_k - d_k)\, x_k + b_1y_1 + \ldots + b_ry_r.\end{aligned}$$

Asi tenemos una combinación lineal de elementos de $\beta_0 \cup \beta_1$ *que es igual al vector cero; pero* $\beta_0 \cup \beta_1$ *es un conjunto linealmente independiente, y así* $a_1 - d_1 = \ldots = a_k - d_k = b_1 = \ldots = b_r = 0$*. De aquí que* $v_1 = 0$*. Entonces*

$$\begin{aligned}0 &= v_0 + v_1 + v_2 = v_0 + v_2 \\ &= a_1x_1 + \ldots + a_kx_k + c_1z + \ldots + c_mz_m\end{aligned}$$

de manera que una combinación lineal de $\beta_0 \cup \beta_2$ *es cero. Como antes, el hecho de que* $\beta_0 \cup \beta_2$ *sea un conjunto linealmente independiente implica que*

$a_1 = \ldots = a_k = c_1 = \ldots = c_m = 0$. *Hemos demostrado que* $\beta_0 \cup \beta_1 \cup \beta_2$ *es linealmente independiente.*
Falta demostrar que $\beta_0 \cup \beta_1 \cup \beta_2$ *genera a* $W_1 + W_2$. *Pero ahora tenemos que* $sev(\beta_0 \cup \beta_1) = W_1$ *y* $L(\beta_0 \cup \beta_2) = W_2$ *puesto que* $\beta_0 \cup \beta_1$ *y* $\beta_0 \cup \beta_2$ *son bases para* W_1 *y* W_2, *respectivamente. Pero*

$$\begin{aligned} sev(\beta_0 \cup \beta_1 \cup \beta_2) &= sev((\beta_0 \cup \beta_1) \cup (\beta_0 \cup \beta_2)) \\ &= sev(\beta_0 \cup \beta_1) + L(\beta_0 \cup \beta_2) \\ &= W_1 + W_2. \end{aligned}$$

De aquí que $\beta_0 \cup \beta_1 \cup \beta_2$ *genera a* $W_1 + W_2$. *Con esto queda completa la demostración.* ■

Como una consecuencia inmediata de este resultado, se tiene el siguiente corolario de utilidad.

Corollario 11 *Sean* W_1 *y* W_2 *subespacios dimensionalmente finitos de un espacio vectorial* V, *tales que* $V = W_1 + W_2$. *Luego* V *es la suma directa de* W_1 *y* W_2 *si y sólo si*

$$\dim(V) = \dim(W_1) + \dim(W_2).$$

Ejemplo 39 *Sea* c *un elemento de un campo infinito* F, *sea* W_1 *el conjunto de todas las funciones constantes en* $\mathcal{P}_n(F)$, *y definase* $W_2 = \{f(x) \in \mathcal{P}_n(F) : f(c) = 0\}$ *Puede verse fácilmente que* W_1 *y* W_2 *son subespacios de* $\mathcal{P}_n(F)$ *y que* $\mathcal{P}_n(F) = W_1 \oplus W_2$. *(Observese que para cualquie* $f(x) \in \mathcal{P}_n(F)$, $g(x) = f(c) \in W_1$ *y* $h(x) = f(x) - f(c) \in W_2$ *y por lo tanto* $f(x) = g(x) + h(x)$*) Como la función constante p(x)=1 claramente constituye una base para* W_1, *se deduce del corolario anterior que*

$$\dim(W_2) = \dim(\mathcal{P}_n(F)) - \dim(W_1) = (n+1) - 1 = n.$$

Ejercicio 53 *Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.*

1. *a*) El espacio vectorial cero no tiene base.

   b) Todo espacio vectoarial generado por un conjunto finito tiene una base.

   c) Todo espacio vetorial tiene una base finita.

   d) Un espacio vectorial no puede tener más de una base.

   e) Si un espacio vectorial tiene una base finita tiene una base finita, entonces el número de vectores en todas las bases es el mismo.

   f) La dimensión de $\mathcal{P}_n(F)$ es n.

   g) La dimensión de $\mathcal{M}_{m\times n}(F)$ es $n+m$.

   h) Suponer que V es un espacio vectorial dimensionalmente finito, que S_1 es un subconjunto linealmente independiente de V y que S_2 es un subconjunto de V que genera a V. Luego S_1 no puede tener más elementos que S_2.

   i) Si S genera al espacio vectorial V, entonces todo vector en V puede escribirse como una combinación lineal de elementos de S de una sola manera.

   j) Todo subespacio de un espacio dimensionalmente finito es dimensionalmente finito.

   k) Si V es un espacio vectorial de dimensión n, entonces V tiene exactamente un subespacio de dimensión 0 y un exactamente un subespacio de dimensión n.

   l) Si W_1 y W_2 son subespacios dimensionalmente finitos de un espacio vectorial, entonces $\dim(W_1+W_2)=\dim(W_1)+\dim(W_2)$.

Ejercicio 54 *Determinar cuáles de los siguientes conjuntos son bases para* $\mathbb{R}^3$.

1. *a*) $\{(1,0,-1),(2,5,1),(0,-4,3)\}$.

   b) $\{(2,-4,1),(0,3,-1),(6,0,-1)\}$.

   c) $\{(1,2,-1),(1,0,2),(2,1,1)\}$.

   d) $\{(-1,3,1),(2,-4,-3),(-3,8,2)\}$.

e) $\{(1,-3,-2),(-3,1,3),(-2,-10,-2)\}$.

Ejercicio 55 *Determinar cuáles de los siguientes conjuntos son bases para* $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

1. *a)* $\{-1-x+2x^2, 2+x-2x^2, 1-2x+4x^2\}$.
   b) $\{1+2x+x^2, 3+x^2, x+x^2\}$.
   c) $\{1+4x-2x^2, -2+3x-x^2, -3-12x+6x^2\}$.
   d) $\{-1+2x+4x^2, 3-4x-10x^2, -2-5x-6x^2\}$.
   e) $\{1+2x-x^2, 4-2x+x^2, -1+18x-9x^2\}$.

Ejercicio 56 *¿Generan los polinomios* x^3-2x^2+1, $4x^2-x+3$ *y* $3x-2$ *a* $\mathcal{P}_3(R)$? *Justifique su respuesta.*

Ejercicio 57 *¿Es* $\{(1,4,-6), (1,5,8), (2,1,1), (0,1,0)\}$ *un subconjunto linealmente independiente de* R^3*? Justifique su respuesta.*

Ejercicio 58 *Dar tres bases diferentes para* F^2 *y para* $\mathcal{M}_{m\times n}(F)$.

Ejercicio 59 *Los vectores* $x_1=(2,-3,1)$, $x_2=(1,4,-2)$, $x_3=(-8,12,-4)$, $x_4=(1,37,-17)$ *y* $x_5=(-3,-5,8)$ *generan a* R^3. *Encontrar un subconjunto de* $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ *que sea una base para* R^3.

Ejercicio 60 *Sea V el espacio vectorial que consta de todos los vectores de* R^5 *para los cuales la suma de coordenadas es cero. Los vectores*

$$\begin{array}{ll} x_1=(2,-3,4,-5,2), & x_2=(-6,9,-12,15,-6), \\ x_3=(3,-2,7,-9,1), & x_4=(2,-8,2,-2,6), \\ x_5=(1,-1,2,1,-3), & x_6=(0,-3,-18,9,12), \\ x_7=(1,0,-2,3,-2), & x_8=(2,-1,1,-9,7) \end{array}$$

generan V. Encontrar un subconjunto de $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$.

Ejercicio 61 *Los vectores* $x_1=(1,1,1,1)$, $x_2=(0,1,1,1)$, $x_3=(0,0,1,1)$, *y* $x_4=(0,0,0,1)$ *forman una base para* F^4. *Encontrar la única representación de un vector arbitrario* (a_1, a_2, a_3, a_4) *en* F^4 *como combinación lineal de los vectores de* x_1, x_2, x_3, *y* x_4.

Ejercicio 62 *Sea*

$$V = \mathcal{M}_{2\times 2}(F), \qquad W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} \in V : a, b, c \in F \right\}$$

y

$$W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & b \end{pmatrix} \in V : a, b \in F \right\}$$

Demostrar que W_1 y W_2 son subespacios de V y encontrar las dimensiones de W_1, W_2, $W_1 + W_2$, y $W_1 \cap W_2$.

Ejercicio 63 *Sea V un espacio vectorial de dimensión n y sea S un subconjunto de V que genera a V.*

1. *a*) Demostrar que S contiene al menos n elementos.
   b) Demostrar que un subconjunto de S es una base para V. (Tenga cuidado de suponer que S sea finito.)

Ejercicio 64 *Sean W_1 y W_2 subespacios de un espacio vectorial V de dimesiones n y m, respectivamente, donde $m \geq n$. Demostrar que* $\dim(W_1 \cap W_2) \leq n$ *y* $\dim(W_1 + W_2) \leq m + n$. *Dar ejemplos de subespacios de R^3 donde cada igualdad se combierta en igualdad.*

Ejercicio 65 *Sea $\{x, y\}$ una base de un espacio vectorial V. Demostrar que tanto $\{x+y, x-y\}$ como $\{ax, by\}$ son bases para V, donde a y b son escalares arbitrarios no nulos.*

Ejercicio 66 *Suponer que V es un espacio vectorial con una base $\{x_1, x_2, x_3\}$. Demostrar que $\{x_1 + x_2 + x_3, x_2 + x_3, x_3\}$ también es una base para V.*

Ejercicio 67 *El conjunto de soluciones para el sistema*

$$\left\{ \begin{array}{rrrcl} x_1 & -2x_2 & +x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & -3x_2 & +x_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

Es un subespacio de R^3. Encontar una base para este subespacio.

Ejercicio 68 *Encontrar bases para los siguientes subespacios de F^5 :*

$$W_1 = \left\{ (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \in F^5 : a_1 - a_2, -a_4 \right\}$$

y

$$W_2 = \left\{ (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \in F^5 : a_2 = a_3 = a_4, \ a_1 + a_5 = 0 \right\}.$$

Cuales son las dimensiones de W_1 y W_2.

Ejercicio 69 *El conjunto de todas las matrices de $n \times n$ cuya traza es igual a cero es un subespacio W de $\mathcal{M}_{n\times n}(F)$. Encontrar una base de W. ¿Cuál es la dimensión de W?*

Ejercicio 70 *El conjunto de todas las matrices triangulares de $n \times n$ es un subespacio W de $\mathcal{M}_{n\times n}(F)$. Encontrar una base de W. ¿Cuál es la dimensión de W?*

Ejercicio 71 *El conjunto de todas las matrices antisimétricas de $n \times n$ es un subespacio W de $\mathcal{M}_{n\times n}(F)$. Encontrar una base de W. ¿Cuál es la dimensión de W?*

Ejercicio 72 *Sean W_1 y W_2 subespacios de un espacio vectorial V tales que $V = W_1 \oplus W_2$. Si β_1 y β_2 son bases para W_1 y W_2, respectivamente, demostrar que $\beta_1 \cap \beta_2 = \oslash$ y que $\beta_1 \cup \beta_2$ es una base para V.*

Ejercicio 73 *Reciprocamente, sean β_1 y β_2 bases disjuntas para W_1 y W_2, respectivamente, de un espacio vectorial V. Demostrar que si $\beta_1 \cup \beta_2$ es una base para V, entonces $V = W_1 \oplus W_2$.*

Ejercicio 74 *Sea W un subespacio de un vectorial dimensionalmente finito V. Determinar la dimensión del espacio vectorial V/W, el espacio cociente de V módulo W. Justifique su respuesta.*

Ejercicio 75 *Encontrar un base para el espacio vectorial de sucesiones no nulas en un campo F.*

Ejercicio 76 *Demostrar que si W_1 es subespacio cualquiera de un espacio vectorial dimensionalmente finito V, entonces existe un subespacio W_2 de V, tal que $V = W_1 \oplus W_2$.*

Ejercicio 77 *Demostrar que un espacio vectorial es dimensionalmente infinito si y sólo si contiene un subconjunto infinito linealmente independiente.*