Capítulo 1

Sistemas de ecuaciones lineales y matrices

1.1. Sistemas de ecuaciones algebraicas lineales.

Considerese un sistema de m ecuaciones lineales con n incognitas $x_1, ..., x_n$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right. \tag{1.1}$$

donde los coeficientes a_{ij} para $i = 1, ..., m$ y $j = 1, ..., n$ y los terminos independientes b_i son números reales o complejos o para decirlo de manera mas general son elementos de un cuerpo (comutativo) arbitrario que vamos a llamar K (en las aplicaciones, K es R o C). Resolver este sistema va a consistir a encontrar en K los valores de las incognitas $x_1, ..., x_n$ para las cuales esas ecuaciones son satisfechas. En esta primera sección de este capítulo, vamos a estudiar las técnicas permitiendonos saber si tal sistema admite una solución y en tal caso, encontrar *todas* las soluciones (en función de un numero de parametros).

1.1.1. Operaciones elementales.

Las técnicas que se usa para resolver tales sistemas de ecuaciones algebraicas lineales se basen sobre tres tipos de operaciones sobre las ecuaciones de un sistema:

a) En un sistema de ecuaciones, podemos replazar una de las ecuaciones por la suma de esta ecuación y de un multiplo de otra ecuación sin modificar el conjunto de las soluciones. Asi, los sistemas:

$$\left\{\begin{array}{ccc} P_1(x_1,...,x_n) & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ P_i(x_1,...,x_n) & = & b_i \\ \vdots & & \vdots \\ P_j(x_1,...,x_n) & = & b_j \\ \vdots & & \vdots \\ P_m(x_1,...,x_n) & = & b_m \end{array}\right. \tag{1.2}$$

y

$$\left\{\begin{array}{ccc} P_1(x_1,...,x_n) & = & b_1 \\ & & \vdots \\ P_i(x_1,...,x_n)+\lambda P_j(x_1,...,x_n) & = & b_i+\lambda b_j \\ & & \vdots \\ P_j(x_1,...,x_n) & = & b_j \\ & & \vdots \\ P_m(x_1,...,x_n) & = & b_m \end{array}\right. \tag{1.3}$$

tienen las mismas soluciones.

b) En un sistema de ecuaciones, podemos intercambiar dos ecuaciones sin modificar el conjunto de soluciones. Asi, es claro que los sistemas:

$$\left\{\begin{array}{ccc} P_1(x_1,...,x_n) & = & b_1 \\ & & \vdots \\ P_i(x_1,...,x_n) & = & b_i \\ & & \vdots \\ P_j(x_1,...,x_n) & = & b_j \\ & & \vdots \\ P_m(x_1,...,x_n) & = & b_m \end{array}\right. \text{ y } \left\{\begin{array}{ccc} P_1(x_1,...,x_n) & = & b_1 \\ & & \vdots \\ P_j(x_1,...,x_n) & = & b_j \\ & & \vdots \\ P_i(x_1,...,x_n) & = & b_i \\ & & \vdots \\ P_m(x_1,...,x_n) & = & b_m \end{array}\right. \tag{1.4}$$

admiten las mismas soluciones.

c) En un sistema de ecuaciones, podemos multiplicar los dos miembros de una ecuación por un elemento no-cero del cuerpo de base K sin modificar el conjunto de las soluciones . Asi, los sistemas

$$\left\{\begin{array}{ccc} P_1(x_1,...,x_n) & = & b_1 \\ & & \vdots \\ P_i(x_1,...,x_n) & = & b_i \\ & & \vdots \\ P_m(x_1,...,x_n) & = & b_m \end{array}\right. \text{ y } \left\{\begin{array}{ccc} P_1(x_1,...,x_n) & = & b_1 \\ & & \vdots \\ \lambda P_i(x_1,...,x_n) & = & \lambda b_i \\ & & \vdots \\ P_m(x_1,...,x_n) & = & b_m \end{array}\right. \tag{1.5}$$

admiten las mismas soluciones si $\lambda \neq 0$.

Las operaciones indicadas anterioramente son llamadas operaciones elementales (sobre las ecuaciones de un sistema). En el caso de operación elemental de tipo (c), el elemento $\lambda \in K$ por lo cual multiplicamos una de las ecuaciones es llamado *factor* de la operación elemental.

1.1.2. Notacion matricial.

Para disfrutar del uso de las operaciones elementales para resolver un sistema de ecuaciones algebraicas lineales, es comodo de adoptar la siguiente notación: a un sistema arbitrario de m ecuaciones a n incognitas,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right. \tag{1.6}$$

asociamos la tabla de los coeficientes:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

que vamos a llamar *matriz (de los coeficientes)* del sistema; es una tabla de m renglones y n columnas. Cada linea corresponde a una ecuación del sistema. Notamos esta matriz $(a_{ij})_{\substack{1\leq j\leq m \\ 1\leq i\leq n}}$ o sencillamente (a_{ij}) cuando el numero de linea e el numero de columnas son indicadas en el texto. Por convención, el primero índice es siempre el de las renglones y el segundo es siempre de las columnas. La entrada a_{ij} es entonces la entrada situada a la intersección entre la i-esima linea y la j-iemsa columna.

Consideramos también la siguiente tabla:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & ... & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & ... & a_{mn} & b_m \end{array} \right) \tag{1.8}$$

llamada *matriz completa o matriz aumentada del sistema*, obtenida adjuntando a la matriz de los coeficientes del sistema la columna de los terminos independientes.

Como las ecuaciones del sistema corresponden a los renglones de la matriz completa, las operaciones elementales descritas antes corresponden a operaciones sobre los renglones de la matriz completa.

1.1.3. Escalonada.

Theorem 1 Por una succesión de operaciones elementales sobre los renglones, podemos transformar cualquier matriz en una matriz $U = (u_{ij})_{\substack{1\leq j\leq m \\ 1\leq i\leq n}}$ que tiene la siguiente propriedad: el numero de entradas nulas al inicio de cada linea aumenta a cada linea, el aumento es stricta para los renglones quien siguen una linea no-cero, es decir que para $i = 1, ..., m-1$ y $k \in \mathbb{N}$ fijado, si $u_{ij} = 0$ por cualquier $j \leq k$, entonces $u_{i+1,j} = 0$ para cualquier $j \leq k+1$.

Una matriz U que tiene este tipo de propiedad es llamada matriz a renglones escalonados. Si una linea de una tal matriz es cero, la condición induce que todas los renglones siguientes son ceros. En una linea no-cero, la primera entrada no-cero es llamada el .^{el} *pivote*" de la linea. Por ejemplo, la matriz siguiente es a renglones escalonados:

$$(a_{ij})_{\substack{1\leq j\leq m\\ 1\leq i\leq n}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.9}$$

Los pivotes de los renglones no-ceros son $a_{12} = 1, a_{24} = 6, a_{35} = 9$. A contrario, el siguiente ejemplo no es a renglones escalonados:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.10}$$

La matriz a renglones escalonados producida usando las operaciones elementales sobre los renglones no son unica. Depende en particular de la elección de los pivotes como podemos verlo en los ejemplos siguientes.

En esos ejemplos, vamos transformar la matriz haciendo operaciones elementales sobre los renglones para obtener una matriz a renglones escalonados (el pivote está encuadrado):

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \boxed{2} & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ \boxed{2} & 1 & 1 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 3/2 & -3/2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \rightsquigarrow L_1+L_2} \begin{pmatrix} \boxed{2} & 3/2 & 1/2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 3/2 & -3/2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightsquigarrow L_2-L_1} \tag{1.12}$$

$$\to \begin{pmatrix} \boxed{2} & 3/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & \boxed{3/2} & -3/2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boxed{2} & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{3/2} & -3/2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boxed{2} & 3/2 & 1/2 \\ 0 & \boxed{3/2} & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Asi la matriz con renglones escalonadas que podemos formar a partir de cualquier matriz no es unica como lo illustramos en los ejemplos anteriores pero como vamos a verlo despues, el numero de renglones no-ceros de la matriz a renglones escalonadas es un *invariante de la matriz inicial* (lo que vamos a llamar mas tarde su *rango*).

Despues de escalonar las renglones de una matriz, podemos todavia seguir las operaciones elementales para anular las entradas situadas arriba de cada pivote. Usando las operaciones de tipo (c) que consisten en multiplicar cada linea no-cero por el inverso de su pivote, llegamos finalemente a una matriz a renglones escalonados en la que todos los pivotes son iguales a 1 y todas las entradas situadas arriba de un pivot son iguales a ceros:

$$\begin{pmatrix} 0 & ... & 0 & 1 & * & ... & * & 0 & * & ... & * & 0 & * & ... \\ 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & * & ... & * & 0 & * & ... \\ 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & * & ... \\ & & & & & & ... & & & & & & & \end{pmatrix} \tag{1.13}$$

Un tal matriz es llamada *matriz reducida de Gauss-Jordan.*

Asi llegamos a un resultado mas preciso:

Corollary 2 *Por una sucesión de operaciones elementales sobre los renglones, podemos transformar cualquier matriz en una matriz reducida de Gauss-Jordan.*

Podemos demostrar que la matriz reducida obtenida a partir de una matriz A dada es determinada de manera unica por A.

1.1.4. Soluciones de sistemas de ecuaciones algebraicas lineales.

Regresamos al problema inicial que es resolver un sistema de m ecuaciones en n incognitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases} \tag{1.14}$$

Por operaciones elementales sobre las ecuaciones de este sistema o lo que es el mismo, sobre los renglones de la matriz completa, obtenemos un sistema que tiene las mismas soluciones y tal que su matriz completa es un matriz reducida de Gauss-Jordan. Es facil de reconocer si un tal sistema admite soluciones:

- los renglones nulos de la matriz completa corresponden a ecuaciones

$$0x_1 + ... + 0x_n = 0 \tag{1.15}$$

  entonces, podemos depreciarlas y interesarnos solamente en los renglones no-nulos. Sea r el numero de esos renglones;

- si el ultimo pivote (es decir el r-esimo) es en la ultima columna (es decir la $n+1$ esimo) que es la columna de los terminos independientes, entonces la ultima ecuación no-trivial es

$$0x_1 + ... + 0x_n = 1 \tag{1.16}$$

y el sistema no tiene solución.

- si el ultimo pivote no es en la ultima columna: sea $j_1, ... j_r$ los indices de las columnas de pivotes, de tal manera que $1 \leq j_1 < j_2 < ... < j_r \leq n$ y que la matriz completa sea del tipo

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccccccccccccc}
 & & j_1 & & & & & & j_2 & & & & j_3 & & & & & & j_r & & \\
 & & \downarrow & & & & & & \downarrow & & & & \downarrow & & & & & & \downarrow & &
\end{array} \\
\left(\begin{array}{ccccccccccccccccccccc|c}
0 & ... & 0 & 1 & * & ... & * & 0 & * & ... & * & 0 & * & ... & ... & * & 0 & * & ... & & & * \\
0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & * & ... & * & 0 & * & ... & ... & * & 0 & * & ... & & & * \\
0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & * & ... & ... & * & 0 & * & ... & & & * \\
0 & ... & & & & & & & & & & & & & ... & & & & & & & * \\
0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & ... & 0 & 1 & * & ... & & & *
\end{array}\right)
\end{array}$$

Haciendo pasar en los miembros de derecho de las ecuaciones correspondientes las variables de indicios $\neq j_1, ..., j_r$, ponemos el sistema en la siguiente forma:

$$\begin{cases}
x_{j_1} & = & -\sum\limits_{j \neq j_1, \ldots, j_r} a'_{1j} x_j + b'_1 \\
x_{j_2} & = & -\sum\limits_{j \neq j_1, \ldots, j_r} a'_{2j} x_j + b'_2 \\
 & \vdots & \\
x_{j_r} & = & -\sum\limits_{j \neq j_1, \ldots, j_r} a'_{rj} x_j + b'_r
\end{cases}$$

Es un sistema que dan los valores de las variables $x_{j_1}, ..., x_{j_r}$ en función de los otros. Las soluciones se obtienen dando a las variables de indicios $\neq j_1, ..., j_r$ valores arbitrarios y a las variables $x_{j_1}, ..., x_{j_r}$ los valores dados por el sistema anterior.

En particular si $r = n$, la matriz completa reducida de Gauss Jordan es de la siguiente forma:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & ... & 0 & b'_1 \\
0 & 1 & ... & 0 & b'_2 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & ... & 1 & b'_r
\end{array}\right) \tag{1.17}$$

y la solución unica es

$$\begin{cases}
x_1 & = & b'_1 \\
 & & \vdots \\
x_r & = & b'_r
\end{cases} \tag{1.18}$$

Sistemas homogeneos: Un sistema de ecuaciones algebraicas lineales es llamada *homogenea* si los miembros $b_1, ..., b_m$ son todos iguales a ceros. Un tal sistema tiene entonces la forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n & = & 0 \\ & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n & = & 0 \end{cases}$$

Este sistema admite siempre la *solución trivial* $x_1 = ... = x_n = 0$. Para determinar si existe otras soluciones, procedemos de la misma manera que anterioramente. La última columna de la matriz completa es cero y queda cero cuando efectuamos operaciones elementales sobre los renglones. El sistema se reduce entonces en la forma:

$$\begin{cases} x_{j_1} & = & -\sum_{j \neq j_1, ..., j_r} a'_{1j} x_j \\ x_{j_2} & = & -\sum_{j \neq j_1, ..., j_r} a'_{2j} x_j \\ & \vdots & \\ x_{j_r} & = & -\sum_{j \neq j_1, ..., j_r} a'_{rj} x_j \end{cases}$$

donde r es el numero de pivotes. Si $r = n$, la solución es unica y es trivial. Si $r < n$, hay soluciones no-triviales que se obtienen dando a las variables de indicios $\neq j_1, ..., j_r$ valores arbitrarios (no todos iguales a ceros) y a las variables $x_{j_1}, ..., x_{j_r}$ los valores dados por el sistema anterior.

1.1.5. Ejercicios.

Exercise 3 *Encontrar todas las soluciones reales del sistemas de ecuaciones:*

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 6 \\ x_1 + x_2 &= 3 \\ x_1 &= 2 \end{aligned}$$

Exercise 4 *Encontrar las soluciones complejas del sistema de ecuaciones:*

$$\begin{aligned} x + iy + (1+i)z - t &= 1 \\ x + y &= 0 \\ (1+i)x + (i-1)z - it &= 1 \end{aligned}$$

1. **Exercise 5** *Encontrar las soluciones reales del sistema de ecuaciones:*

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= 1 \\ 2x + y - z &= 0 \\ 3x + z &= 1 \\ 5x + y &= 1 \end{aligned}$$

Exercise 6 *Encontrar las soluciones reales del sistema de ecuaciones:*

$$\begin{aligned} x+2y-3z &= 0 \\ -x+y+z &= 0 \\ 4x-2y+z &= 0 \end{aligned}$$

Exercise 7 *Encontrar las soluciones reales del sistema de ecuaciones:*

$$\begin{aligned} 3x_1+2x_2+x_3-x_4-x_5 &= 0 \\ x_1-x_2-x_3-x_4+2x_5 &= 0 \\ -x_1+2x_2+3x_3+x_4-x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Exercise 8 *Cual es el conjunto de polinomios P tal que $(X^2+X+1).P = 2X^4+3X^3+6X^2+4X+3$?*

Exercise 9 *Notamos N el número de soluciones de un sistema de n ecuaciones lineales a m incognitas. Sabemos que $N \in \{0,1,\infty\}$. Cuales son los valores posibles de N*

1. *a*) si $n < m$

   b) si $n = m$

   c) si $n > m$

   En los tres casos, dar un ejemplo de sistema de ecuaciones con N soluciones para cada valor posible de N y si algunos valores de N son imposibles, justificarlo.

Exercise 10 *Discutir en función del valor del real k, el numero de soluciones reales del sistema de ecuaciones:*

$$\begin{aligned} x+2y-z &= 4 \\ 2x+5y+z &= k \\ x+3y+(k^2+1)z &= 5k \end{aligned}$$

Exercise 11 *Gerardo se entreno a efectuar varias operaciones elementales simultanemente para resolver mas rapido los sistemas de ecuaciones. El transforma el sistema*

$$I \left\{ \begin{array}{c} x_1+2x_2-x_3+x_4=1 \\ x_1-x_2+x_3+x_4=0 \end{array} \right.$$

replazando la primera linea L_1 por L_1-L_2 y la linea L_2 por L_2-L_1 y obtiene el sistema:

$$II \left\{ \begin{array}{c} 3x_2-2x_3=1 \\ -3x_2+2x_3=-1 \end{array} \right.$$

y encontro como soluciones del sistema II $(x_1, \frac{1}{3}(1+2x_3), x_3, x_4)$ donde $x_{1,3,4}$ son arbitrarios. Su amigo Maria lo hace notar que $(1,1,1,0)$ es solución del sistema II pero no del sistema I. Donde esta el error?

Exercise 12 *(para ir mas alla de este curso) Sea un sistema de ecuaciones lineales a coeficientes reales. Demostrar que si este sistema no tiene soluciones reales, entonces no tiene tampoco de soluciones complejas.*

1.2. matrices

Las operaciones elementales que definimos en la sección anterior admiten una interpretación muy sencilla en termino de multiplicación matricial. Para darla, tenemos que empezar por recordar las definiciones fundamentales.

Definition 13 *Sea K un campo conmutativo arbitrario, notamos $K^{m\times n}$ el conjunto de las matrices $m\times n$ (o de genero (m,n)) sobre K, es decir el conjunto de las tablas rectangulares a m renglones y n columnas y tales que todas sus entradas son elementos de K. La igualdad entre dos matrices $A=(a_{ij})_{\substack{1\le j\le m\\ 1\le i\le n}}$ y $B=(b_{ij})_{\substack{1\le j\le m\\ 1\le i\le n}}$ en $K^{m\times n}$ es equivalente a la igualdad de cada de sus entradas:*

$$A=B \Longleftrightarrow a_{ij}=b_{ij} \text{ para } i=1,...,m \text{ y } j=1,...,n \tag{1.19}$$

Las matrices que tienen solamente un renglon (resp. columna) son llamadas matrices-renglones (matrices-columnas). Las matrices con el numero de renglones igual al numero de sus columnas es llamadas matrices cuadradas. El orden de una matriz cuadrada es el numero de sus renglones o de sus columnas. Una matriz diagonal es una matriz cuadrada con todas sus entradas fuera de la diagonal principal iguales a céro.

Algunas matrices particulares:

1. $0_{m,n}$ es la matriz nula de genero (m,n) en cual todas sus entradas son nulas.

2. I_n es la matriz identidad de orden n, definida por

$$I_n=(\delta_{ij})_{1\le i,j\le n} \tag{1.20}$$

donde

$$\delta_{ij}=\begin{cases} 0 \text{ si } i\neq j\\ 1 \text{ si } i=j\end{cases} \tag{1.21}$$

La función δ_{ij} asi definida es llamada simbolo de Kronecker.

1.2.1. Operaciones matriciales.

Definition 14 *La suma de dos matrices $m\times n$ es definida por*

$$(a_{ij})+(b_{ij})=(a_{ij}+b_{ij}) \tag{1.22}$$

Definition 15 *El producto de una matriz $m\times n$ por un elemento de K es definido por*

$$\alpha(a_{ij})=(\alpha a_{ij}) \tag{1.23}$$

Definition 16 *El producto de una matriz $m \times n$ y de una matriz $n \times p$ es una matriz $m \times p$ definida por*

$$(a_{ij})_{\substack{1\leq j\leq m\\1\leq i\leq n}}.(b_{ij})_{\substack{1\leq j\leq n\\1\leq i\leq p}} = (c_{ij})_{\substack{1\leq j\leq m\\1\leq i\leq p}} \tag{1.24}$$

donde

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \text{ para } i = 1, ..., m \text{ y } j = 1, ..., p \tag{1.25}$$

Las propiedades siguientes se demostran por calculo directo:

1. Propiedades de la addición: para cualquier $A, B, C \in K^{m\times n}$,

$$(A + B) + C = A + (B + C) \tag{1.26}$$
$$A + B = B + A \tag{1.27}$$
$$A + 0_{m,n} = 0_{m,n} + A \tag{1.28}$$
$$A + (-1)A = 0_{m,n} = (-1)A + A \tag{1.29}$$

2. Propiedades de la multiplicación por un elemento de K: para $A, B \in K^{m\times n}$ y $\alpha, \beta \in K$,

$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B \tag{1.30}$$
$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A \tag{1.31}$$
$$(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A) \tag{1.32}$$
$$1A = A \tag{1.33}$$

3. Propiedades de la multiplicación matricial: para $A \in K^{m\times n}$, $B \in K^{n\times p}$ y $C \in K^{p\times q}$,

$$(AB)C = A(BC) \tag{1.34}$$
$$AI_n = A = I_mA \tag{1.35}$$

4. Propiedades mixtas: para $A, A' \in K^{m\times n}$, $B, B' \in K^{n\times p}$ y $\alpha \in K$,

$$(A + A')B = AB + A'B \tag{1.36}$$
$$A(B + B') = AB + AB' \tag{1.37}$$
$$(\alpha A)B = \alpha(AB) = A(\alpha B) \tag{1.38}$$

A notar que el producto de matrices NO es conmutativo: en general, tenemos

$$AB \neq BA \tag{1.39}$$

Pero usando la ultima propiedad es facil de verificar que la matriz de la forma αI_n para cualquier $\alpha \in K$, que llamamos *matriz escalar* conmutan con todas las matrices cuadradas de orden n: para cada $A \in K^{n\times n}$ y $\alpha \in K$,

$$(\alpha I_n)A = \alpha A = A(\alpha I_n) \tag{1.40}$$

Es a notar que todas las matrices NO admiten un inverso por la multiplicación y que un producto matricial puede ser igual a céro mismo si ningúno de sus factores son nulos:

Example 17

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.41}$$

La mutliplicación matricial permite de notar bajo una forma particularmente compacta los sistemas de ecuaciones algebraicas lineales. De hecho, el sistema de m ecuaciones a n incognitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases} \tag{1.42}$$

se escribo sencillamente como

$$A.X = B \tag{1.43}$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.44}$$

es la matriz de los coeficientes del sistema,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{1.45}$$

es la matriz-columna de las incognitas, y

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{1.46}$$

es la matriz-columna de los terminos independientes.

1.2.2. Operaciones "por bloques".

Definition 18 *Si los enteros m y n son decompuestos en suma de enteros strictamente positivos:*

$$m = m_1 + ... + m_r \tag{1.47}$$

$$n = n_1 + ... + n_s \tag{1.48}$$

cada matriz de genero (m, n) puedo ser considerada como una matriz $r \times s$ en la cual la entrada de indices i, j es una matriz de genero (m_i, n_j) que llamamos bloque

Example 19 *Asi, por ejemplo, para* $m = 4$ *y* $n = 6$,

$$4 = 1 + 2 + 1, 6 = 2 + 4$$

corresponde a la siguiente decomposición de una matriz arbitraria A *de genero* $(4, 6)$:

$$A = \left(\begin{array}{cc|cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ \hline a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{pmatrix} \tag{1.49}$$

donde

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} \\ A_{21} &= \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \\ A_{31} &= \begin{pmatrix} a_{41} & a_{42} \end{pmatrix} \\ A_{12} &= \begin{pmatrix} a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \end{pmatrix} \\ A_{22} &= \begin{pmatrix} a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \end{pmatrix} \\ A_{32} &= \begin{pmatrix} a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Las decomposiciones las mas frecuentamente usadas son la decomposición por renglones:

$$A = \left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \hline a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array}\right) = \begin{pmatrix} a_{1*} \\ a_{2*} \\ \vdots \\ a_{m*} \end{pmatrix} \tag{1.50}$$

donde $a_{i*} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix}$ es el i-esimo renglon de A, y la decomposición por columnas:

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array}\right) = \begin{pmatrix} a_{*1} & a_{*2} & \dots & a_{*n} \end{pmatrix} \tag{1.51}$$

donde

$$a_{*1} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \tag{1.52}$$

es la i-esima columna de A.

Proposition 20 *El resultado de operaciones efectuadas sobre las matrices descompuestas en bloques puede obtenerse aplicando las reglas usuales de calculo matricial a esos bloques como si esos bloques eran elementos de las matrices (a condición que esas operaciones sobre los bloques tienen sentido.*

Proof. La proposición es obvia para las multiplicaciones por elementos de K y por el addición matricial. Asi tenemos que probarlo para las multiplicaciones matriciales. Sea

$$A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}, B = (b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$$

dos matrices de genero (m, n) y (n, p) respectivamente, de tal manera que el producto AB sea definido.

Consideramos las siguientes decomposición:

$$m = m_1 + ... + m_r, n = n_1 + ... + n_s, p = p_1 + ... + p_t$$

y las decomposiciones en bloques correspondientes de A y B:

$$A = (A_{\alpha\beta})_{\substack{1\leq\alpha\leq r\\ 1\leq\beta\leq s}}, B = (B_{\alpha\beta})_{\substack{1\leq\alpha\leq s\\ 1\leq\beta\leq t}}$$

Tenemos que probar:

$$AB = \left(\sum_{\gamma=1}^{s} A_{\alpha\gamma}B_{\gamma\beta}\right)_{\substack{1\leq\alpha\leq r\\ 1\leq\beta\leq t}}$$

Pero tambien, tenemos que el elemento i, j de AB es igual a $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$ que podemos decomponer es suma de s terminos:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{n_1} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1+n_1}^{n_1+n_2} a_{ik}b_{kj} + ... + \sum_{k=1+n_1+...+n_{s-1}}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

y podemos reconocer en el miembro derecho el elemento i, j de la matriz descompuesta en bloques:

$$\left(\sum_{\gamma=1}^{s} A_{\alpha\gamma}B_{\gamma\beta}\right)_{\substack{1\leq\alpha\leq r\\ 1\leq\beta\leq t}}$$

■

En particular, en un producto de dos matrices, podemos decomponer el factor de derecho en columna o el factor de izquierda en renglon para hacer aparecer las columnas o los renglones del producto como productos matriciales: para $A \in K^{m\times n}$ y $B \in K^{n\times p}$, tenemos

$$A.B = A.\begin{pmatrix} b_{*1} & ... & b_{*p} \end{pmatrix} = .\begin{pmatrix} Ab_{*1} & ... & Ab_{*p} \end{pmatrix}$$

y tambien,

$$A.B = \begin{pmatrix} a_{1*} \\ \vdots \\ a_{m*} \end{pmatrix}.B = \begin{pmatrix} a_{1*}B \\ \vdots \\ a_{m*}B \end{pmatrix}$$

y tambien,

$$A.B = \begin{pmatrix} a_{1*} \\ \vdots \\ a_{m*} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} b_{*1} & \ldots & b_{*p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1*}.b_{*1} & \ldots & a_{1*}.b_{*1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m*}.b_{*1} & \ldots & a_{m*}.b_{*p} \end{pmatrix}$$

1.2.3. Transposición

Definition 21 *Para* $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} \in K^{m \times n}$*, definimos*

$$A^t = (a'_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}} \in K^{n \times m} \tag{1.53}$$

donde

$$a'_{ij} = a_{ji} \text{ para } i = 1, ..., n \text{ y } j = 1, ..., m \tag{1.54}$$

La matriz A^t es llamada la transpuesta de la matriz A. La obtenemos escribiendo en columna los renglones de A (y vice-versa)

Proposition 22 *Para* $A, B \in K^{m \times n}$ *y* $\alpha, \beta \in K$,

$$(\alpha A + \beta B)^t = \alpha A^t + \beta B^t. \tag{1.55}$$

Proposition 23 *Para* $A \in K^{m \times n}$ *y* $B \in K^{n \times p}$,

$$(A.B)^t = B^t.A^t \tag{1.56}$$

Proposition 24 *Para* $A \in K^{m \times n}$,

$$(A^t)^t = A \tag{1.57}$$

Las demostraciones de esas propiedades se hacen por calculo directo y las dejamos como ejercicios a los lectores.

1.2.4. Inversion.

Definition 25 *Una matriz $A \in K^{m \times n}$ es llamada invertible a la izquierda (resp. a la derecha) si existe una matriz $B \in K^{n \times m}$ tal que $B.A = I_n$ (resp. $A.B = I_n$). Cualquier matriz B que satisface esa condición es llamada inversa a la izquierda (resp. inversa a la derecha) de A.*

Example 26 *Cualquier matriz-renglon no-céro es inversible a la derecha. De hecho,si $a_1, ..., a_n \in K$ y no son todos iguales a céro, podemos encontrar (en general de varias maneras) $b_1, ..., b_n \in K$ tal que $a_1 b_1 + ... + a_n b_n = 1$, lo que significa que*

$$\begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = (1) = I_1 \tag{1.58}$$

Example 27 *De la misma manera, cualquier matriz-columna no-céro es invertible a la izquierda. Este ejemplo no enseña qie el inverso a la izquierda o a la derecha de un matriz no son en general unico.*

Proposition 28 *Si una matriz es invertible a la izquierda y a la derecha, entonces, admite un y un unico inverso a la izquierdo que es tambien el unico inverso a la derecha.*

Proof. Sea $A \in K^{m\times n}$ una matriz invertible a la izquierda y a la derecha. Suponemos que B sea su inverso a la izquierda y que C sea su inverso a la derecha, de tal manera que

$$\begin{aligned} BA &= I_n \\ AC &= I_m \end{aligned}$$

Tenemos que probar que $B = C$. Consideramos por eso el producto (BAC), sabemos que

$$\begin{aligned} BAC &= B(AC) = BI_m = B \\ BAC &= (BA)C = I_nC = C \end{aligned}$$

entonces, $B = C$. Eso comproba que cualquier inverso a la izquierda de A es igual a C y que cualquier inverso a la derecha de A es igual a B; entonces, hay solamente un inverso a la izquierda quien es tambien el unico inverso a la derecha. ■

Si una matriz A satisface la condición de la proposición, decimos que la matriz A es invertible y notamos A^{-1} su unico inverso (a la izquierda y a la derecha). Veremos mas tarde que solas las matrices cuadradas pueden ser invertibles, lo que no es obvio a priori.

Proposition 29 *El inverso de cualquier matriz invertible es invertible: si $A \in K^{m\times n}$ es invertible, entonces $A^{-1} \in K^{n\times m}$ es invertible y*

$$(A^{-1})^{-1} = A \tag{1.59}$$

Proposition 30 *El producto de dos matrices invertibles es invertibles: si $A \in K^{m\times n}$ y $B \in K^{n\times p}$ son invertibles, entonces, $A.B \in K^{m\times p}$ es invertible y*

$$(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1} \tag{1.60}$$

Proposition 31 *La transpuesta de cualquier matriz invertible es invertible: si $A \in K^{m\times n}$ es invertible, entonces $A^t \in K^{n\times m}$ es invertible y*

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t \tag{1.61}$$

Las demostraciones de esas proposiciones se hacen directamente a partir de la definición de matriz invertible. Por lo mismo, las dejamos como ejercicios a los lectores.

1.2.5. Matrices elementales.

Definition 32 *Un matriz elemental de tipo I es una matriz que difiere de la matriz identidad solamente por una sola entrada situada fuera de la diagonal principal. Un tal matriz es entonces cuadrada y de la forma:*

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & \lambda & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

donde λ es la entrada no-céro y de indice i, j con $i \neq j$, las otras entradas fuera de la diagonal principal son iguales a céro.

De manera equivalente, una matriz elemental de tipo I es una matriz obtenida efectuando una operación elemental de tipo I sobre los renglones o sobre las columnas de la matriz identidad. La entrada λ como es situada a la intersección del i-esimo renglon con la j-esima columna, podemos obtener la matriz E cambiando el i-esimo renglon de la matriz identidad por la suma de este renglon y del j-esimo renglon multiplicado por λ, o si preferimos decirlo de otra manera, cambiando la j-esima columna de la matriz unidad por la suma de esta columna con la i-esims columna multiplicada por λ.

De la misma manera, efectuanda operaciones elementales de tipo II o III sobre los renglones o las columnas de la matriz identidad, podemos definir matrices elementales de tipo II o III que son de la siguiente forma:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & & \\ & & & 0 & & & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & & & \\ & & & & & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & & 0 & & & \\ & & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \tag{1.62}$$

o

$$M = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \lambda & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \tag{1.63}$$

donde $\lambda \neq 0$ El elemento $\lambda \in K$ es llamado factor de la matriz elemental de tipo III (M). Es claro de la forma misma de las matrices elementales, que la transpuesta de cualquier matriz elemental es un matriz elemental del mismo tipo.

Proposition 33 *Cualquier matriz elemental es inversible y su inverso es una matriz elemental del mismo tipo (y de factor inverso por el tipo III)*

Proof. Consideramos primero la matriz E definida anterioramente. Un calculo directo nos enseña que la matriz

$$E' = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & -\lambda & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

donde la entrada $-\lambda$ ocupa el mismo lugar que la entrada λ en E, es un inversoa la izquierda y a la derecha de E. Entonces, tenemos $E' = E^{-1}$. Para las matrices P y M, podemos verificar facilemente que $P^{-1} = P$ y

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \lambda^{-1} & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

■

Proposition 34 *Realizar un operación elemental sobre los renglones de una matriz es equivalente a multiplicar esta matriz a la izquierda por una matriz elemental: Mas precisamente, sea $A \in K^{m\times n}$ una matriz arbitraria y $A' \in K^{m\times n}$, la matriz obtenida haciendo un certain operación elemental sobre los renglones de A. Sea $E \in K^{m\times n}$ la matriz obtenida efectuando la misma operación elemental sobre los renglones de la matriz identidad I_m, entonces*

$$A' = E.A$$

Proof. Sea

$$E' = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & \lambda & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

donde la entrada λ esta en la (i,j) posición. Podemos calcular el producto $E.A$ decomponiendo A en renglones:

$$E.A = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & \lambda & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1*} \\ \vdots \\ a_{j*} \\ \vdots \\ a_{i*} \\ \vdots \\ a_{m*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1*} \\ \vdots \\ a_{j*} \\ \vdots \\ a_{i*} + \lambda a_{j*} \\ \vdots \\ a_{m*} \end{pmatrix}$$

La demostración es similar para las operaciones elementales de tipo II y III. ■

Corollary 35 *Sea $A \in K^{m\times n}$ una matriz arbitraria y sea $U \in K^{m\times n}$ una matriz bajo forma reducida de Gauss-Jordan obtenida efectuando operaciones elementales sobre los renglones de A. Existe una sucesión de matrices elementales $E_1, ..., E_r$ tales que*

$$A = E_1 ... E_r.U$$

La demostración es dejado como ejercicio a los lectores.

Hasta el fin de esta sección, vamos a considerar el caso particular de matrices cuadradas. Sea $A \in K^{n\times n}$, y sea $U \in K^{n\times n}$ una matriz bajo forma reducida de Gauss-Jordan obtenida efectuanda operaciones elementales sobre los renglones de A. Como U es cuadrada, tenemos la alternativa:

sea el numero de pivotes de U es n, y entonces, $U = I_n$;

sea el numero de pivotes de U es $< n$, y entonces el ultimo renglon de U es nulo.

Theorem 36 *Sea $A \in K^{n\times n}$ una matriz cuadrada arbitraria. las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *A es invertible;*

(b) *A es invertible a la izquierda;*

(c) *A es invertible a la derecha;*

(d) *A es un producto de matrices elementales*

(e) *Cualquier matriz U bajo la forma reducida de Gauss-Jordan obtenida efectuando las operaciones elementales sobre los renglones de A es la matriz identidad I_n;*

(f) *la matriz I_n puede ser obtenida efectuando operaciones elementales sobre las lineas de A;*

(g) *El sistema homogeneo $A.X = 0$ admite solamente la solución trivial;*

(h) *Para cualquier $B \in K^n$, el sistema $A.X = B$ admite un y una sola solución.*

Un matriz cuadrada que satisface esas condiciones equivalentes es cualificada de regular. Las matrices no-regulares son llamadas matrices singulares.
Proof. la demostración se hacen en el siguiente orden:

$$\begin{array}{lcl} (a) & \Rightarrow & (b) \Rightarrow (g) \Rightarrow (e) \Rightarrow (f) \Rightarrow (d) \Rightarrow (a) \\ (a) & \Rightarrow & (h) \Rightarrow (g) \\ (a) & \Rightarrow & (c) \Rightarrow (a) \end{array}$$

Los detalles de la demostración son dejado a la atención de los lectores. ∎

Aplicación al calculo del inverso. La relación entre la inversibilidad de A y la forma de U etablecida en el teorema anterior suggiere una manera pratica de determinar el inverso de A (si existe): formamos una matriz $n \times 2n$ juxtaponiedo A y la matriz identidad:

$$(A|\ I_n)$$

despues efectuamos sobre los renglones de esta matriz las mismas operaciones elementales que para reducir A a su forma de Gauss-Jordan:

$$(A|\ I_n) \to (A_1|\ A_1') \to \cdots \to (A_r|\ A_r') \to (U|\ B)$$

Cada flecha representa una transformación por una operación elemental sobre los renglones o de manera equivalente, la multiplicación a la izquierda por una matriz elemental; para cualquier $i = 0, ..., r$, existe entonces una matriz elemental E_i tal que

$$\left(A_{i+1}|\ A_{i+1}'\right) = E_i.\left(A_i|\ A_i'\right) = \left(E_i.A_i|\ E_i.A_i'\right)$$

Entonces, tenemos

$$(U|\ B) = E_r....E_0\,(A|\ I_n)$$

y $B = E_r...E_0$ y $U = B.A$.

Si $U \neq I_n$, entonces, el teorema anterior nos dice que A no es inversible. A contrario, si $U = I_n$, entonces, B es el inverso a la izquierda de A y entonces usando el teorema anterior, eso nos enseña que A es invertible y que $B = A^{-1}$.

1.2.6. Ejercicios.

Exercise 37 *Sea un campo K, $A \in K^{n\times n}$ y $\alpha \in K$ y D una matriz diagonal de la forma*

$$D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & ... & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & ... & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

demostrar que $D.A = A.D$

Exercise 38 *Hallar A^4 si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$*

Exercise 39 *Consideramos un campo K y tres matrices $A, B, C \in K^{n\times n}$. Suponemos que B sea invertible y que $BAB^{-1} = C$. Demostrar por inducción sobre k que para cualquier k entero positivo, $A^k = B^{-1}C^kB$.*

Exercise 40 *Sea un campo K y $A, B \in K^{n\times n}$, demostrar que*

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \Longleftrightarrow AB = BA$$

Exercise 41 *Sea K un campo, $A \in K^{n\times m}$ y $B \in K^{m\times p}$, demostrar que $(AB)^t = B^tA^t$*

Exercise 42 *Sea K un campo, $A \in K^{n\times n}$. Definimos la traza de A como la suma de los elementos situado en la diagonal principal:*

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$$

Demostrar que si $B \in K^{n\times n}$, entonces, $tr(AB) = tr(BA)$

Exercise 43 *Hallar el inverso de*

$$\begin{pmatrix} i & 3 & -i \\ 0 & 2i & 1 \\ -i & 0 & -i \end{pmatrix}$$

Exercise 44 *Hallar el inverso de la matriz*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercise 45 *Determinar por cuales valores de* $\lambda \in \mathbb{R}$ *, la siguiente matriz es invertible:*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

para esos valores, hallar el inverso.

Exercise 46 *Sea* M *una matriz cuadrada. Demostrar que* M *es invertible si y solamente si* M^t *es invertible. Demostrar que si* M *es invertible, entonces* $(M^t)^{-1} = (M^{-1})^t$

Exercise 47 *Si* M *es una matriz cuadrada tal que* $M^2 - M + I = 0$*, demostrar que* M *es invertible y determinar su inverso*

Exercise 48 *(mas alla del curso) Demostrar que podemos determinar si una matriz es invertible y hallar su inverso haciendo operaciones elementales sobre las columnas en lugar de hacerlo sobre los renglones.*

Exercise 49 *(mas alla del curso) Es posible que una matriz cuadrada real tiene su inverso complejo pero no inverso real?*